

ТЕМА № 1

Определение опорных реакций для различных схем опирания балок и рам

Цель занятия: изучить приемы, позволяющие наиболее рационально определять опорные реакции при различных схемах опирания балок и рам.

Типы опорных закреплений

Для плоской системы можно выделить следующие типы опорных закреплений:

1) *шарнирно-неподвижная опора*, позволяющая только поворот системы вокруг нее. В этой опоре в общем случае возникают две составляющие опорной реакции. Условные обозначения такой опоры приведены на рис. 1.1, а;

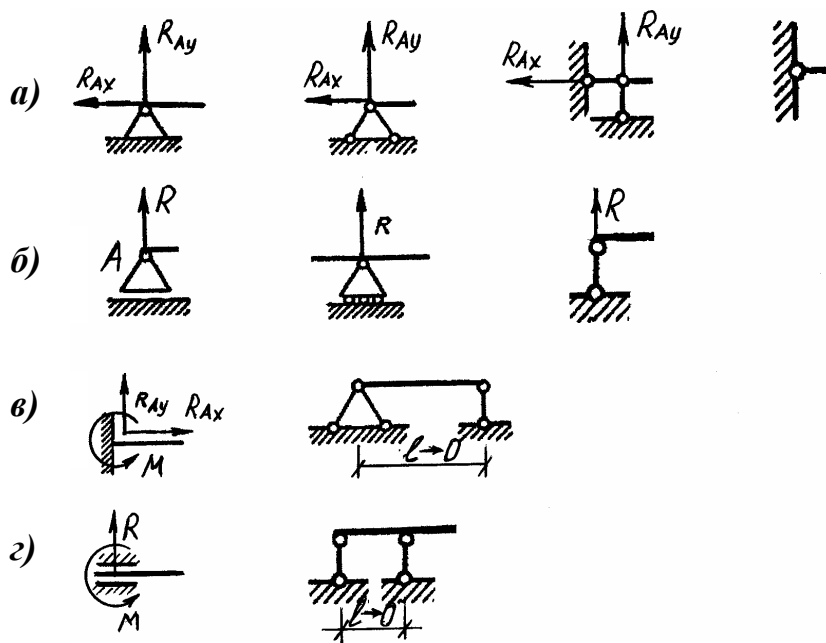


Рис. 1.1

2) *шарнирно-подвижная опора* накладывает связь только на вертикальное смещение. В этой опоре возникает реакция по направлению наложенной связи. Условное обозначение такой опоры приведено на рис. 1.1, б;

3) *неподвижная жесткая заземляющая опора* (жесткая заделка) накладывает связи на все возможные перемещения, и в ней возникают три составляющих опорной реакции. Условное обозначение этой опоры приведено на рис. 1.1, в;

4) *подвижная жесткая заземляющая опора*, позволяющая линейное перемещение по одному направлению. В ней возникают только две составляющие опорной реакции. Условное обозначение такой опоры приведено на рис. 1.1, з.

Уравнения равновесия, составляемые для определения опорных реакций, можно представить в трех различных вариантах:

1) в виде суммы проекций сил на две произвольные, не параллельные друг другу, и суммы моментов сил относительно любой точки плоскости ($\sum x = 0$; $\sum y = 0$; $\sum M = 0$);

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекций ($\sum x = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$);

3) в виде трех сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одной прямой ($\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum M_C = 0$).

Выбор того или иного варианта составления уравнений равновесия, а также выбор точек и направлений осей, используемых при составлении этих уравнений, производится в каждом конкретном случае с таким расчетом, чтобы по возможности не проводить совместное решение уравнений. Для проверки правильности определения опорных реакций полученные их величины рекомендуется подставлять в какое-либо уравнение равновесия, не использованное ранее.

Примеры определения опорных реакций

Пример 1

Определить величину опорных реакций в балке, изображенной на рис. 1.2.

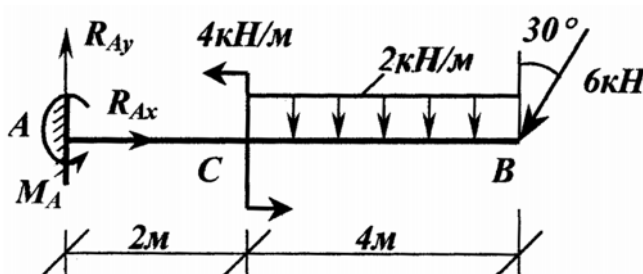


Рис. 1.2

1. Задаемся ожидаемым направлением опорных реакций, возникающих в жесткой заделке.

2. Составляем уравнения равновесия и определяем величину опорных реакций.

$$\sum x = 0. \quad R_{Ax} - 6 \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad R_{Ax} = 3 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0. \quad R_{Ay} - 2 \cdot 4 - 6 \cos 30^\circ = 0$$

$$R_{Ay} = 8 + 6 \cdot 0,866 = 13,196 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A - 4 + 2 \cdot 4 \cdot (2 + 2) + 6(2 + 4) \cos 30^\circ = 0$$

$$M_A = -4 + 32 + 36 \cdot 0,866 = 59,176 \text{ кНм.}$$

Положительные значения опорных реакций подтверждают, что ожидаемое их направление выбрано правильно.

Пример 2

Определить величину опорных реакций в раме, изображенной на рис. 1.3.

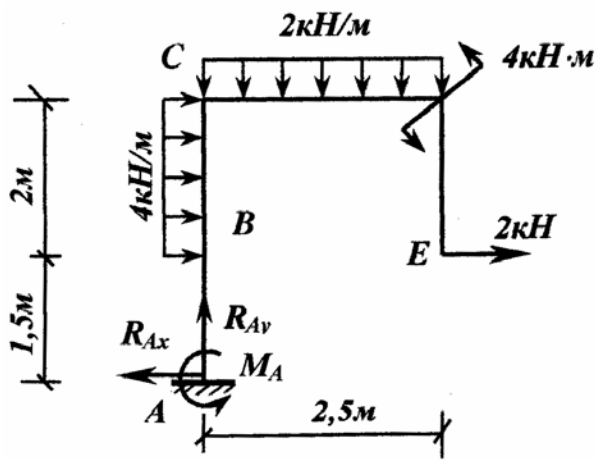


Рис. 1.3

1. Задаемся ожидаемым направлением опорных реакций в жесткой заделке А.

2. Составляем необходимые уравнения равновесия и определяем величину опорных реакций.

$$\sum x = 0 \quad -R_{Ax} + 4 \cdot 2 + 2 = 0$$

$$R_{Ax} = 10 \text{ кН}$$

$$\sum y = 0 \quad R_{Ay} - 2 \cdot 2,5 = 0$$

$$R_{Ay} = 5 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 1,5 \right) + 2 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} - 4 + 2 \cdot 1,5 = 0$$

$$M_A = 20 + 6,25 - 4 + 3 = 25,25 \text{ кНм}$$

Пример 3

Определить величину опорных реакций в балке (рис. 1.4).

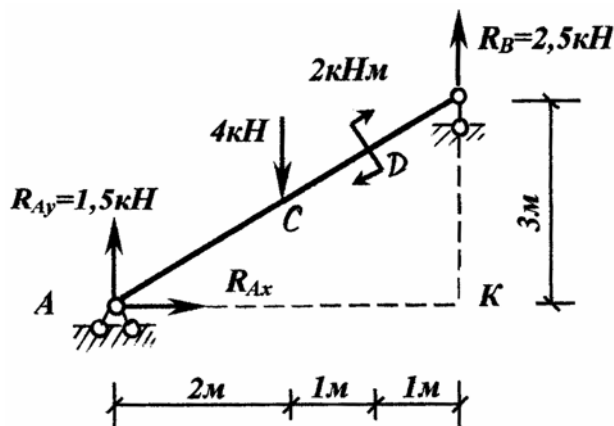


Рис. 1.4

Для определения опорной реакции R_{Ay} воспользуемся суммой моментов всех сил относительно точки K , находящейся на пересечении линий действия реакций R_B и R_{Ax} , т.е. в точке K . Относительно этой точки реакции R_B и R_{Ax} не будут давать момента.

$$\sum M_K = 0 \quad 4 \cdot R_{Ay} - 4 \cdot 2 + 2 = 0 \quad R_{Ay} = 1,5 \text{ кН}$$

В качестве проверочного уравнения в этом случае можно использовать сумму проекций всех сил на вертикальную ось.

$$\sum y = 1,5 - 4 + 2,5 = 0.$$

Пример 4

Определить величину опорных реакций в раме (рис. 1.5).

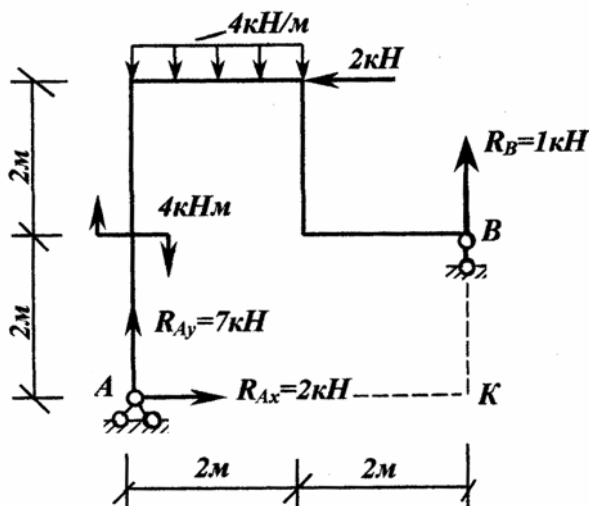


Рис. 1.5

1. Задаемся направлением опорных реакций в раме.

2. Составляем необходимые уравнения равновесия.

Для данной схемы опирания целесообразно использовать следующие уравнения равновесия:

$$\sum x = 0 \quad R_{Ax} - 2 = 0 \quad R_{Ax} = 2 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$4 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 4R_B = 0$$

$$R_B = 1 \text{ кН}$$

Для исключения из уравнения равновесия R_{Ax} и R_B составим сумму моментов относительно точки K .

$$\sum M_K = 0 \quad 4R_{Ay} + 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 0 \quad R_{Ay} = 7 \text{ кН}$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим

$$\sum y = 7 - 4 \cdot 2 + 1 = 0.$$

Пример 5

Определить величину опорных реакций для балки (рис. 1.6)

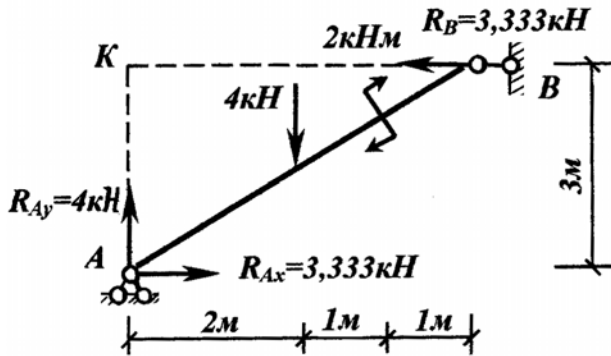


Рис. 1.6

1. Задаемся ожидаемым направлением опорных реакций.

2. Составим необходимые уравнения равновесия системы.

При данной схеме опирания наиболее рационально использовать следующие уравнения равновесия:

$$\sum y = 0 \quad R_{Ay} - 4 = 0 \quad R_{Ay} = 4 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0 \quad 4 \cdot 2 + 2 - 3R_B = 0 \quad R_B = 3,333 \text{ кН}$$

$$\sum M_K = 0 \quad 4 \cdot 2 + 2 - 3R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 3,333 \text{ кН}$$

Для проверки правильности определения опорных реакций воспользуемся $\sum x = 0$.

$$\sum x = 3,333 - 3,333 = 0.$$

Пример 6

Определить величину опорных реакций в раме (рис. 1.7)

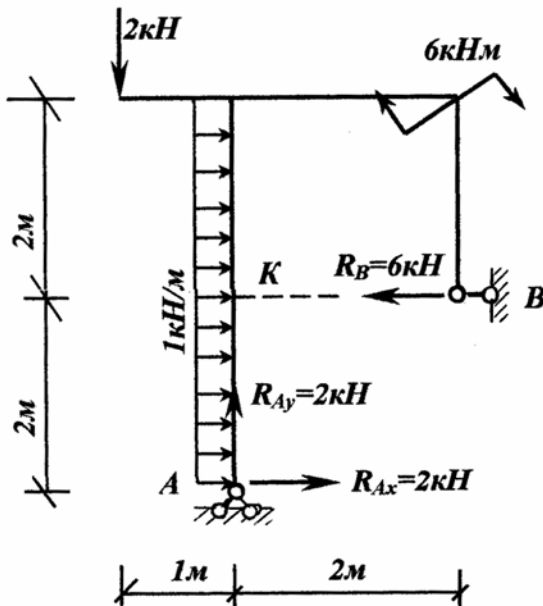


Рис. 1.7

1. Задаемся ожидаемым направлением опорных реакций.

2. Составим необходимые уравнения равновесия и определим величину опорных реакций.

$$\sum y = 0 \quad R_{Ay} - 2 = 0$$

$$R_{Ay} = 2 \text{ кН} \quad \sum M_A = 0$$

$$1 \cdot 4 \cdot 2 + 6 - 2 \cdot 1 - 2R_B = 0$$

$$R_B = 6 \text{ кН} \quad \sum M_K = 0$$

$$-2R_{Ax} - 2 \cdot 1 + 6 = 0 \quad R_{Ax} = 2 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum x = 2 + 1 \cdot 4 - 6 = 0$

Пример 7

Определить величину опорных реакций для балки, изображенной на рис. 1.8

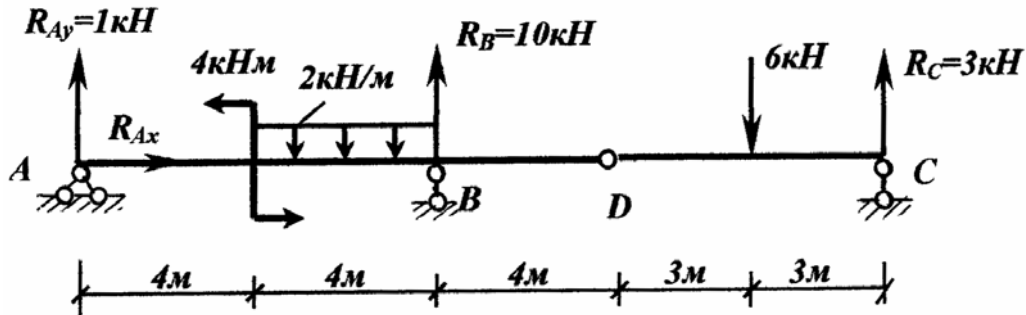


Рис. 1.8

1. Задаемся ожидаемым направлением опорных реакций.
2. Составляем необходимые уравнения равновесия для всей балки, которая является составной системой.

$$\sum x = 0 \quad R_{Ax} = 0.$$

Дальше систему можно разбить на две части (рис. 1.9).

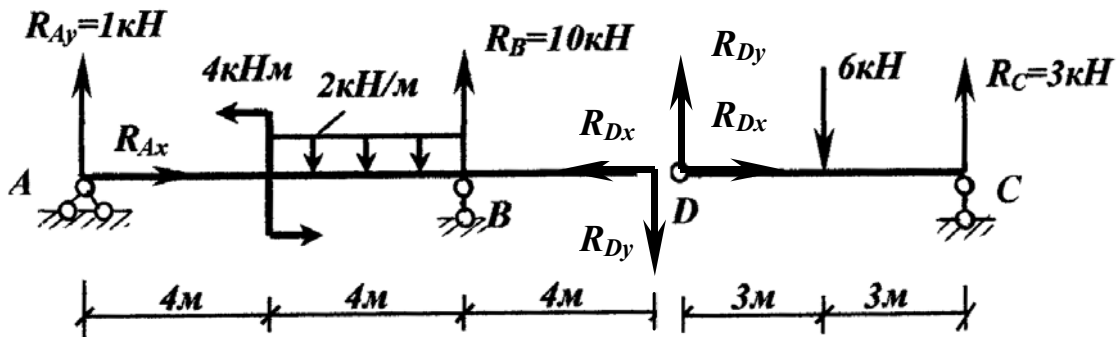


Рис. 1.9

Составляем необходимое уравнение равновесия для правой части, которое позволяет сразу определить реакцию R_C .

$$\sum M_D^{n.u.} = 0 \quad 3 \cdot 6 - 6R_C = 0 \quad R_C = 3 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{n.u.} = 0 \quad -3 \cdot 6 + 6R_{Dy} = 0 \quad R_{Dy} = 3 \text{ кН}$$

Реакции R_{Ay} и R_B легко определить, приложив к левой части реакцию R_{Dy} как внешнюю нагрузку (рис. 1.10).

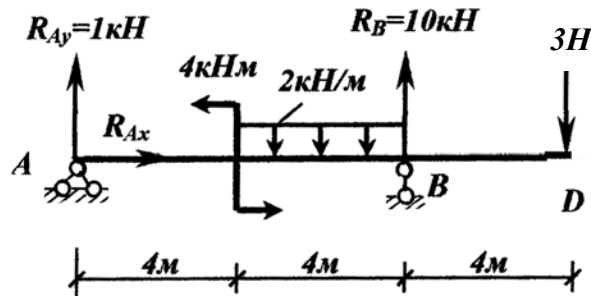


Рис. 1.10

$$\sum M_A = 0 \quad -4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 12 - 8R_B = 0 \quad R_B = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 4 + 8R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} = 1 \text{ кН}$$

Для проверки правильности определения опорных реакций воспользуемся уравнением равновесия всей балки

$$\sum y = 1 + 10 + 3 - 4 \cdot 2 - 6 = 14 - 14 = 0.$$

Пример 8

Определить величину опорных реакций в трехшарнирной раме (рис. 1.11).

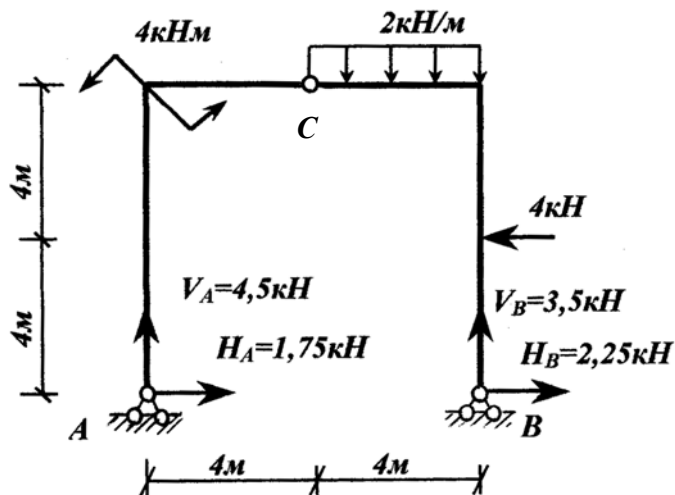


Рис. 1.11

$$\sum M_A = 0 \quad -4 + 2 \cdot 4 \cdot 6 - 4 \cdot 4 - 8V_B = 0 \quad V_B = 3,5 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 8V_A = 0 \quad V_A = 4,5 \text{ кН}$$

Теперь можно выполнить проверку правильности определения вертикальных составляющих опорных реакций. Для этого составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось.

$$\sum y = 4,5 + 3,5 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$$

1. Задаемся положительным направлением опорных реакций.

2. Составляем необходимые уравнения равновесия и определяем величину опорных реакций.

Для системы в целом можно составить следующие уравнения, из которых можно сразу определить вертикальные составляющие опорных реакций:

А теперь можно составить уравнения равновесия левой и правой частей рамы, из которых можно определить горизонтальные составляющие опорных реакций.

$$\sum M_C^{л.ч.} = 0 \quad 4,5 \cdot 4 - 4 - 8H_A = 0 \quad H_A = 1,75 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{п.ч.} = 0 \quad 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 3,5 \cdot 4 + 8H_B = 0 \quad H_B = -2,25 \text{ кН}$$

Знак минус говорит о том, что истинное направление реакции H_B противоположно ранее принятому.

Выполним проверку правильности определения горизонтальных составляющих опорных реакций. Для этого составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось.

$$\sum x = 1,75 - 4 + 2,25 = 4,00 - 4 = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Определить реакции в балках и рамах, изображенных на рис. 1.12

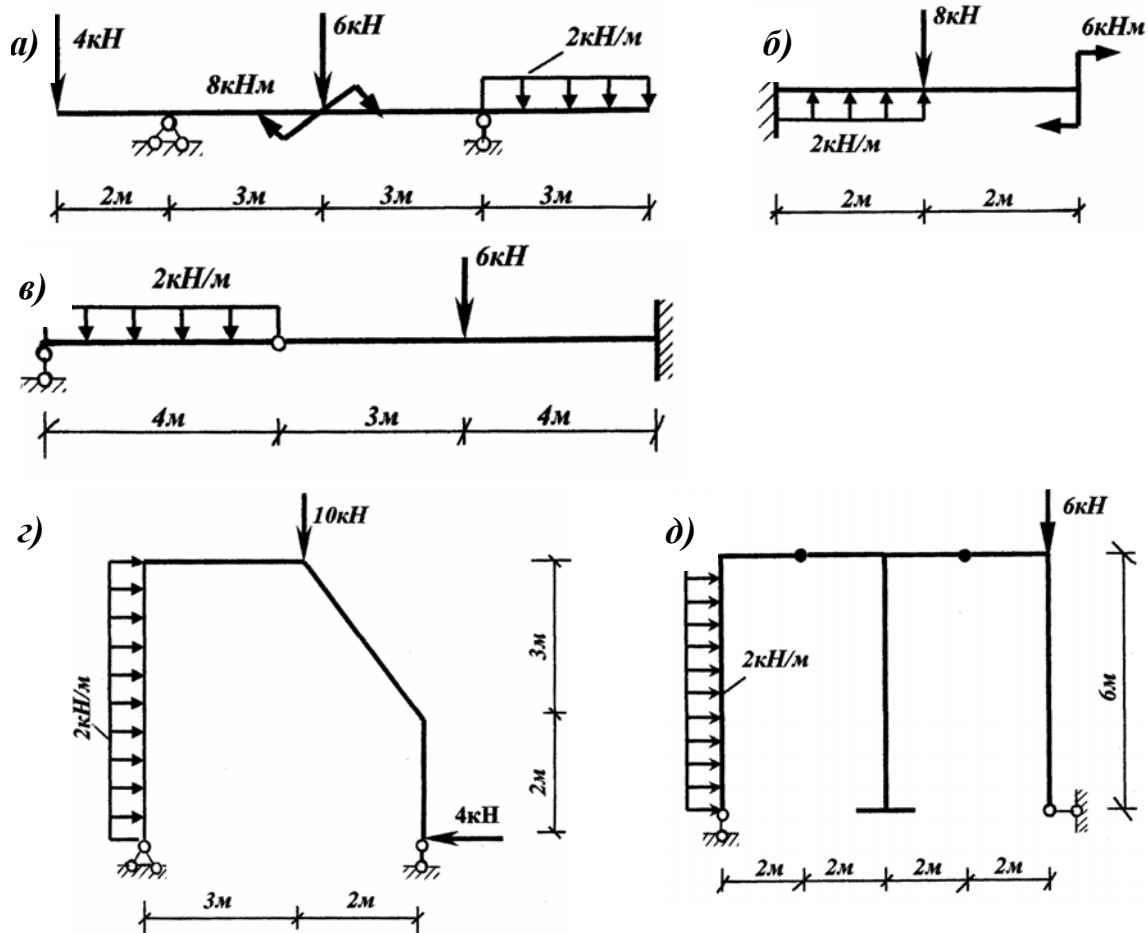


Рис. 1.12

ТЕМА № 2

Определение внутренних усилий, напряжений и деформаций при осевом растяжении и построение эпюр N , σ , δ

Цель занятия: приобрести практические навыки для определения внутренних усилий, напряжений и перемещений и построения их эпюр при осевом растяжении

Для определения продольных сил используют метод сечений. Продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону сечения, на ось, совпадающую с осью бруса. Продольная сила положительна при растяжении и отрицательна при сжатии.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила в данном сечении;

A – площадь поперечного сечения.

Абсолютная деформация в общем случае равна

$$\Delta l = \sum \int_0^{l_i} \frac{N_i}{E_i A_i} dx.$$

Если в пределах участка продольная сила N и жесткость бруса при растяжении постоянна, то абсолютная деформация этого участка

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Рассмотрим определение продольных сил, напряжений и перемещений с последующим построением их эпюр на примере расчета ступенчатого статически определимого стального бруса.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$$

Пример 1

1. Используя метод сечений, определим величину продольных сил в поперечных сечениях бруса по участкам.

III участок (рис. 2.1, б)

$$\sum y = 0 \quad N_3 - 30 = 0 \quad N_3 = 30 \text{ кН}$$

II участок (рис. 2.1, в)

$$\sum y = 0 \quad N_2 + 40 - 30 = 0 \quad N_2 = -10 \text{ кН.}$$

I участок (рис. 2.1, з)

$$\sum y = 0 \quad N_1 + 100 + 40 - 30 = 0 \quad N_1 = -110 \text{ кН.}$$

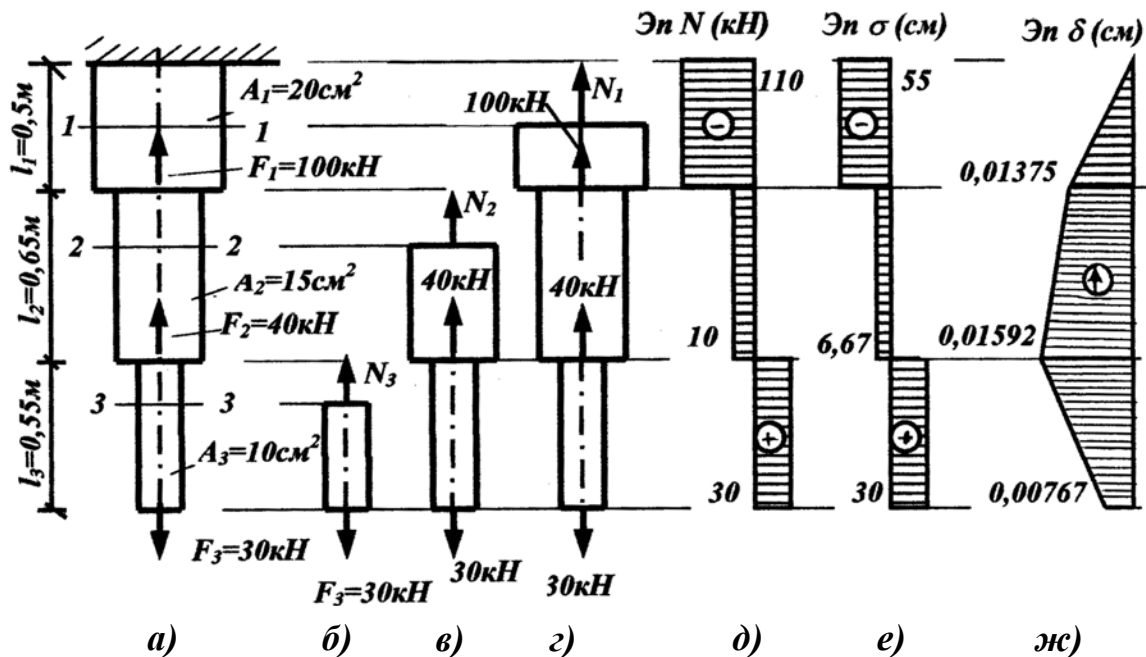


Рис. 2.1

Как видно из приведенных рисунков, для определения продольных сил использовали систему сил от свободного конца бруса. В этом случае не надо определять величину опорной реакции в жесткой заделке. Предварительно на схемах задавались положительным направлением продольных сил, т.е. считали их растягивающими.

2. На основании выполненных расчетов строим эпюру продольных сил (рис. 2.1, д).

3. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по участкам.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{110}{20} = -5,5 \text{ кН/см}^2 = -55 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{10}{15} = -0,667 \text{ кН/см}^2 = -6,67 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{30}{10} = 3 \text{ кН/см}^2 = 30 \text{ МПа.}$$

4. На основании выполненных расчетов строим эпюру нормальных напряжений – эпюру σ (рис. 2.1, е).

5. Определим величину абсолютных деформаций участков бруса

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{110 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0,01375 \text{ см}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{10 \cdot 65}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} = -0,00217 \text{ см}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{30 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,00825 \text{ см}$$

6. Определим абсолютное укорочение всего бруса

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00825 = 0,00767 \text{ см}$$

7. Определим перемещения границ участков относительно верхней жесткой заделки:

$$\delta_A = 0 \quad \delta_{I-I} = \Delta l_1 = -0,01375 \text{ см (вверх)}$$

$$\delta_{II-II} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,01375 - 0,00217 = -0,01592 \text{ см (вверх)}$$

$$\delta_{III-III} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00825 = -0,00767 \text{ см}$$

8. На основании выполненных расчетов строим эпюру перемещений сечений относительно верхней жесткой заделки (рис. 2.1, ж).

Пример 2

1. Используя метод сечений, определим величину продольных сил по участкам бруса.

$$\text{I участок (рис. 2.2, б)} \quad \sum y = 0 \quad N_1 + 100 - 50 \cdot 1,2 = -40 \text{ кН}$$

$$\text{II участок (рис. 2.2, в)} \quad 0 \leq x \leq 1,2 \text{ м}$$

$$\sum y = 0 \quad N_2 - 50x = 0 \quad N_2 = 50x$$

$$x = 0, \quad N = 0; \quad x = 1,2 \text{ м}, \quad N_2 = 60 \text{ кН.}$$

2. На основании выполненных расчетов строим эпюру N (рис. 2.2, з).

3. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях по участкам бруса.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{40}{20} = -2 \text{ кН/см}^2 = -20 \text{ МПа}$$

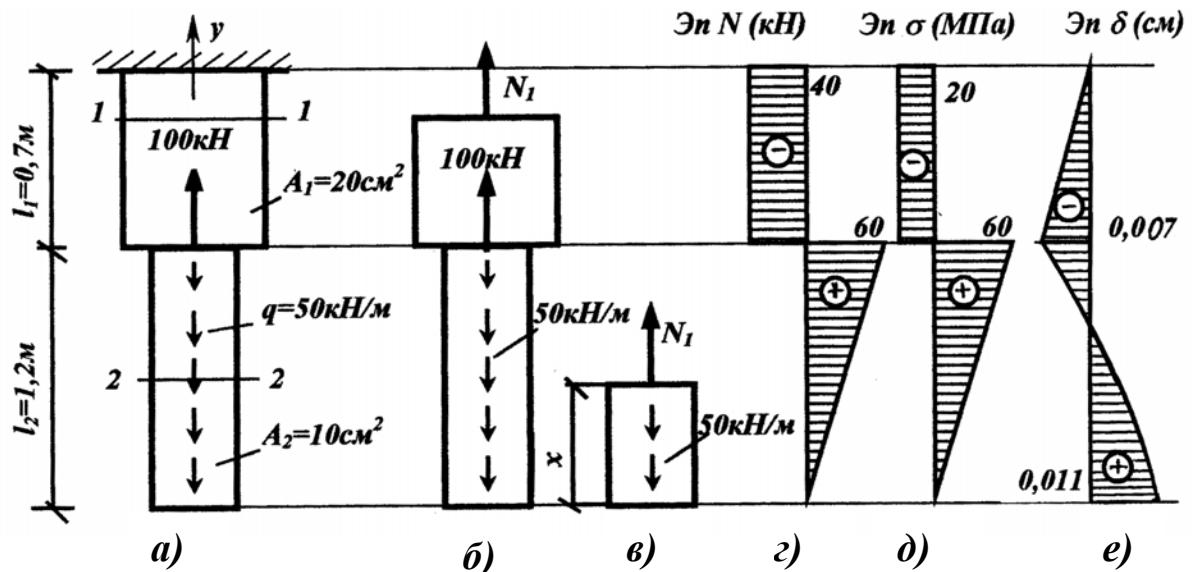


Рис. 2.2

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{50x}{10} = 5x; \quad x = 0 \quad \sigma_2 = 0$$

$$x = 1,2 \text{ м} \quad \sigma_2 = 6 \text{ кН/см}^2 = 60 \text{ МПа}$$

4. На основании выполненных расчетов строим эпюру σ (рис. 2.2, д).

5. Определим абсолютные продольные деформации участков бруса.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{40 \cdot 70}{210^4 \cdot 20} = -0,007 \text{ см}$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{l_2} \frac{N_2}{EA} dx; \quad N_2 = 50x, \text{ если } q = 50 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \text{ и } x \text{ в м};$$

$$N_2 = 0,5x, \text{ если } q = 0,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}} \text{ и } x \text{ в см.}$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{120} \frac{0,5x}{EA_2} dx = \frac{0,5}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} \int_0^{120} x dx = \frac{0,5 \cdot 120^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,018 \text{ см.}$$

6. Определим абсолютное удлинение всего бруса

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,007 + 0,018 \text{ см} = 0,011 \text{ см.}$$

7. Определим перемещение границ участков относительно верхней жесткой заделки.

$$\delta_A = 0; \quad \delta_{I-I} = \Delta l_1 = -0,007 \text{ см (вверх).}$$

$$\delta_{II-II} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,007 + 0,018 = 0,011 \text{ см (вниз).}$$

8. На основании выполненных расчетов строим эпюру δ (рис. 2.2, е).

Задания для самостоятельной работы

Построить эпюры N , σ и δ для стальных брусьев, изображенных на рис. 2.3.

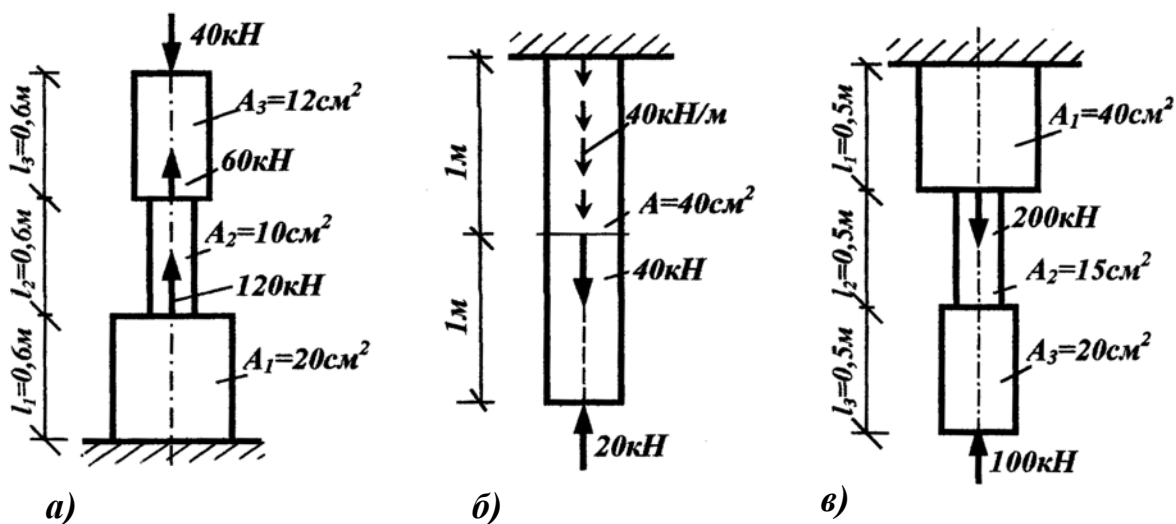


Рис. 2.3

ТЕМА № 3

Статически неопределимые задачи при растяжении

Цель занятия: закрепить полученные теоретические сведения по расчету статически неопределимых брусьев и простейших стержневых систем и выработать практические приемы и навыки, применяемые при расчете данных систем.

Статически неопределимые системы – это такие системы, для определения реакций и внутренних усилий в которых недостаточно одних уравнений статики, а необходимы дополнительные уравнения, связанные с деформацией системы.

В статически неопределимых системах возникают внутренние усилия не только от нагрузки, но и от действия температуры и неточности изготовления отдельных элементов.

Рассмотрим приемы решения задач на конкретных примерах.

Пример 1

Определить внутренние усилия, напряжения и деформации участков и всего бруса (рис. 3.1, а) и построить эпюры N , σ , δ .

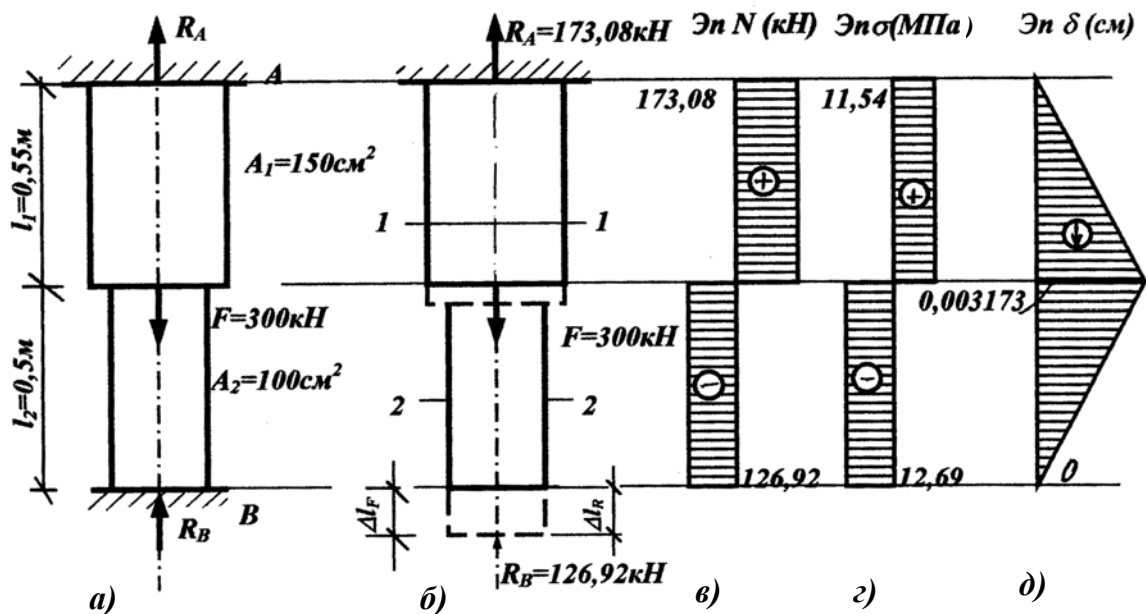


Рис. 3.1

1. Определим степень статической неопределимости бруса. Всего неизвестных два (R_A и R_B), а для системы сил, действующих по одной прямой, можно составить одно независимое уравнение статики

$$\sum y = 0. \quad R_A + R_B - F = 0. \quad (1)$$

Следовательно, система один раз статически неопределима.

2. Образует основную систему отбрасыванием нижней жесткой заделки B . Действие ее заменено реакцией R_B . (рис. 3.1, б).

Составляем дополнительное уравнение совместности деформаций из условия, что перемещение нижнего сечения B в основной системе должно быть равно нулю.

$$\delta_B = 0. \quad \Delta l_F + \Delta l_{R_B} = 0, \quad (2)$$

где Δl_F – абсолютное удлинение бруса в основной системе от реакции R_B , равное

$$\Delta l_F = \frac{Fl_1}{EA_1} = \frac{300 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,0055 \text{ см};$$

Δl_{R_B} – абсолютное укорочение бруса в основной системе от реакции R_B , равное

$$\begin{aligned} \Delta l_{R_B} &= -\frac{R_B \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_B \cdot l_2}{EA_2} = -\frac{R_B}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right) = \\ &= -\frac{R_B}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{55}{150} + \frac{50}{100} \right) = -0,4333 \cdot 10^{-4} R_B. \end{aligned}$$

Решаем уравнение совместности деформаций

$$0,0055 - 0,4333 \cdot 10^{-4} R_B = 0 \quad R_B = 126,92 \text{ кН.}$$

Из уравнения статики (1) можно определить величину R_A

$$R_A = F - R_B = 300 - 126,92 = 173,08 \text{ кН.}$$

3. Используя метод сечений, определим величину продольных сил по участкам бруса

I участок:

$$0 \leq x \leq 0,55 \text{ м}$$

$$\sum y = 0$$

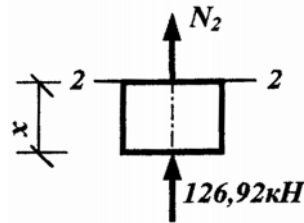
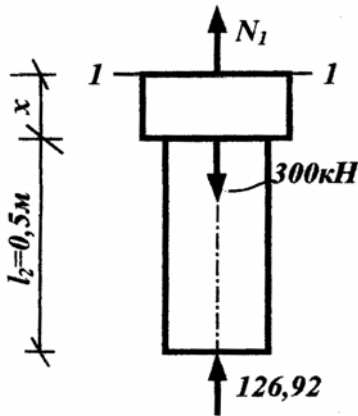
$$N_1 - 300 + 126,92 = 0$$

$$N_1 = 173,08 \text{ кН}$$

II участок:

$$0 \leq x \leq 0,5 \text{ м}$$

$$N_2 = -126,92 \text{ кН}$$



4. На основании выполненных расчетов строим эпюру продольных сил (рис. 3.1, в).

5. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по участкам.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{173,08}{150} = 1,154 \text{ кН/см}^2 = 11,54 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{126,92}{100} = -1,269 \text{ кН/см}^2 = -12,69 \text{ МПа}$$

6. На основании выполненных расчетов строим эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по его длине (рис. 3.1, г).

7. Определим абсолютные деформации участков бруса

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{173,08 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,003173 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{126,92 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = -0,003173 \text{ см.}$$

8. Определим перемещения границ участков относительно верхней жесткой заделки.

$$\delta_A = 0, \quad \delta_{I-I} = \Delta l_1 = 0,003173 \text{ см};$$

$$\delta_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,003173 - 0,003173 = 0.$$

9. На основании выполненных расчетов строим эпюру перемещений (рис. 3.1, д).

Пример 2

Определить внутренние усилия и напряжения в ступенчатом бруске, изображенном на рис. 3.2, а, если произошло повышение температуры на $\Delta t = 10^\circ \text{C}$. Принять коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ 1/град}$ и модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, величину зазора $\Delta = 0,002 \text{ см}$.

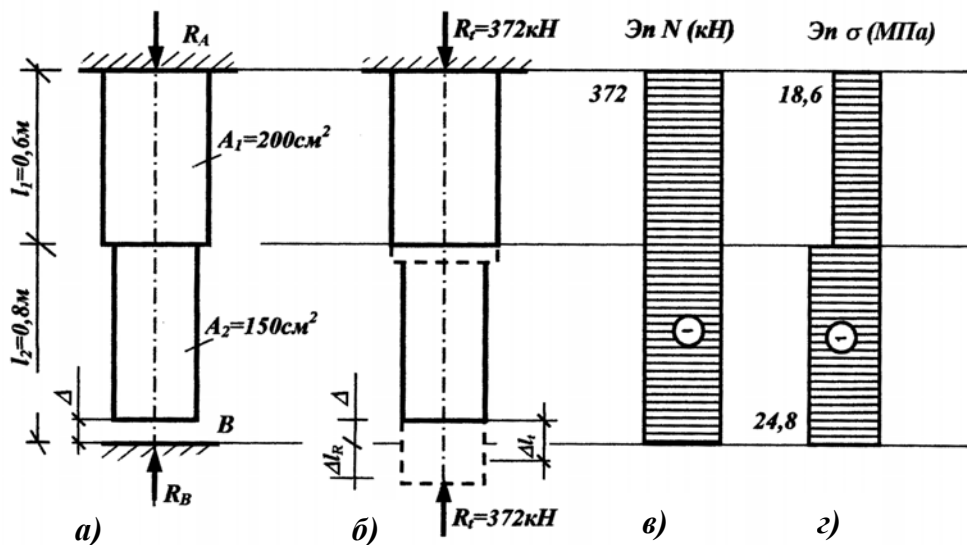


Рис. 3.2

1. При наличии зазора, как при действии нагрузки, так и при действии температуры, необходимо обосновать статическую неопределимость задачи. Если удлинение в основной системе, образованной из заданной путем удаления жесткой заделки, от действия нагрузки или температуры будет больше зазора Δ , то система является статически неопределимой. В

противном случае она статически определима, и опора не участвует в работе бруса.

Образую основную систему путем отбрасывания нижней жесткой заделки (рис. 3.2, б).

Удлинение бруса в основной системе от действия температуры

$$\Delta l_t = \alpha(l_1 + l_2) \cdot \Delta t = 125 \cdot 10^{-7} (60 + 80) \cdot 10 = 0,0175 \text{ см} > \Delta = 0,002 \text{ см}.$$

Следовательно, задача статически неопределима.

Составим единственное независимое уравнение статики

$$\sum y = 0, \quad -R_A + R_B = 0, \quad R_A = R_B = R_t. \quad (1)$$

2. Составим дополнительное уравнение совместности деформаций, из которого и определим величину реакции R_t .

$$\delta_B = \Delta, \quad \Delta l_t + \Delta l_{R_t} = \Delta. \quad (2)$$

Укорочение бруса от реакции R_t будет равно

$$\begin{aligned} \Delta l_{R_t} &= -\frac{R_t \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_t \cdot l_2}{EA_2} = -\frac{R_t}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right) = \\ &= -\frac{R_t}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{60}{200} + \frac{80}{150} \right) = -0,4167 \cdot 10^{-4} R_t. \end{aligned}$$

Решаем уравнение совместности деформаций (2):

$$0,0175 - 0,4167 \cdot 10^{-4} R_t = 0,002; \quad R_t = 372 \text{ кН}.$$

3. Определим величину продольной силы, используя метод сечений, и построим эпюру N (рис. 3.2, в)

$$N = N_1 = N_2 = -R_t = -372 \text{ кН}.$$

4. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса от действия температуры и построим эпюру напряжений в поперечных сечениях бруса по длине бруса (рис. 3.2, г)

$$\begin{aligned} \sigma_{1t} &= \frac{N_1}{A_1} = -\frac{372}{200} = -1,86 \text{ кН/см}^2 = -18,6 \text{ МПа}; \\ \sigma_{2t} &= \frac{N_2}{A_2} = -\frac{372}{150} = -2,48 \text{ кН/см}^2 = -24,8 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Пример 3

Подобрать площади поперечных сечений стержней, поддерживающих абсолютно жесткий брус, для системы, изображенной на рис. 3.3. Принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа = 16 кН/см².

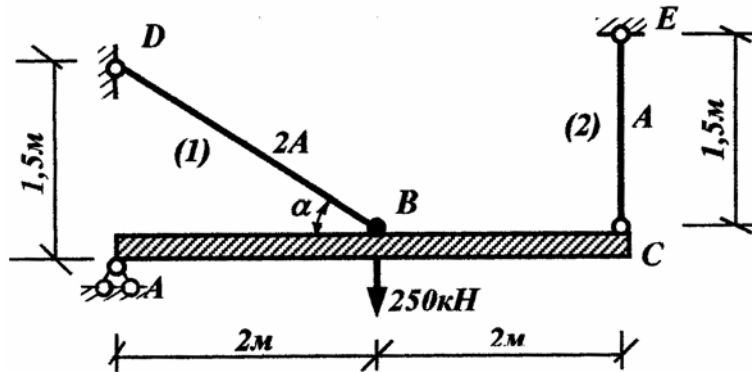


Рис. 3.3

1. Определим недостающие геометрические параметры.

$$l_1 = DB = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м}; \quad \sin \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{2}{2,5} = 0,8.$$

2. Пользуясь принципом удаления связей, изобразим схему напряженного состояния, полагая оба стержня растягивающимися (рис. 3.4), и определим степень статической неопределимости данной системы.

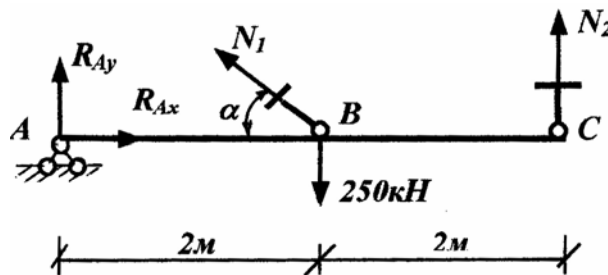


Рис. 3.4

Всего неизвестных 4 (R_{Ax} , R_{Ay} , N_1 , N_2), а уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил можно составить только три. Следовательно, данная система $4 - 3 = 1$ раз статически неопределима.

Для дальнейшего расчета нам необходимо определить только N_1 и N_2 .

$$\sum M_A = 0. \quad -2N_1 \cdot \sin \alpha - 4N_2 + 250 \cdot 2 = 0;$$

$$2 \cdot 0,6N_1 + 4N_2 = 250 \cdot 2;$$

$$1,2N_1 + 4N_2 = 500 \quad (1)$$

3. Изобразим диаграмму перемещений, согласованную с напряженным состоянием системы, т.е. покажем оба стержня растянутыми (рис. 3.5), составим уравнение совместности деформаций.

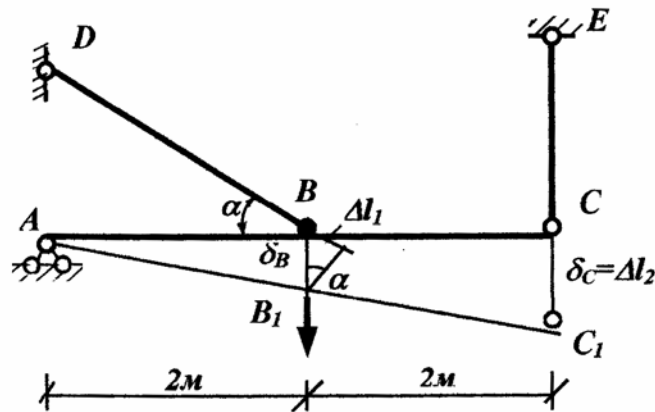


Рис. 3.5

Из подобия треугольников можно записать

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{4}{2}, \text{ или } \delta_C = 2\delta_B. \quad (2)$$

Выразим перемещение узлов через абсолютные удлинения стержней

$$\delta_C = \Delta l_2; \quad \delta_B = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{0,6}.$$

После подстановки δ_C и δ_B в выражение (2) получаем

$$\Delta l_2 = \frac{2\Delta l_1}{0,6}, \text{ или } \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{0,3} \quad (3)$$

Выразим абсолютные деформации стержней по закону Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 2,5}{2EA};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 1,5}{EA}.$$

После подстановки в выражение (3) получаем:

$$\frac{1,5N_2}{EA} = \frac{2,5N_1}{2EA \cdot 0,3}, \text{ или } N_2 = \frac{2,5N_1}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,3} = 2,7778N_1;$$

$$N_2 = 2,7778N_1 \quad (4)$$

4. Решая совместно (1) и (4), получаем

$$1,2N_1 + 4 \cdot 2,7778N_1 = 500;$$

$$N_1 = 40,614 \text{ кН}; \quad N_2 = 112,816 \text{ кН}$$

5. Определим величину нормальных напряжений в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{40,614}{A_1} = \frac{40,614}{2A} = \frac{20,307}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{112,816}{A}.$$

Следовательно, $\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{112,816}{A}$.

6. Из условия прочности при растяжении

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{112,816}{A} \leq [\sigma]$$

определим необходимую площадь сечения A .

$$A \geq \frac{112,816}{[\sigma]} = \frac{112,816}{16} = 7,051 \text{ см}^2.$$

Тогда $A_2 = A = 7,051 \text{ см}^2$, $A_1 = 2A = 2 \cdot 7,051 = 14,102 \text{ см}^2$.

Пример 4

Стержень (2) изготовлен короче проектного размера на величину $\Delta = 0,20 \text{ см}$. Определить величину продольных сил и нормальных напряжений в стержнях (1) и (2), поддерживающих абсолютно жесткий брус (рис. 3.6)

Принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $A_1 = 10 \text{ см}^2$, $A_2 = 15 \text{ см}^2$.

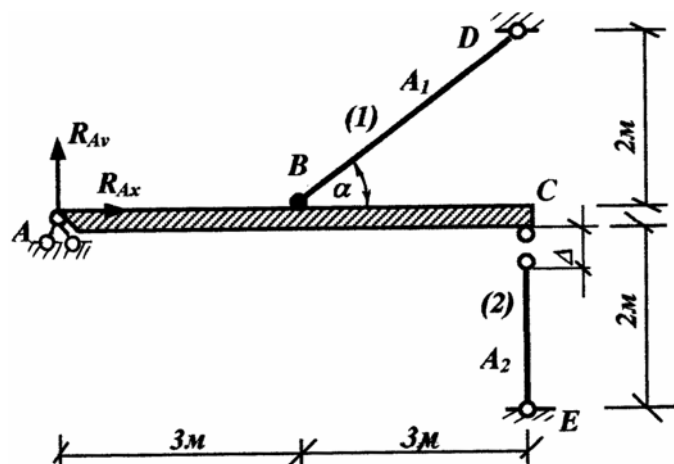


Рис. 3.6

1. Определим недостающие геометрические параметры системы.

$$l_1 = BD = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,606 \text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,606} = 0,5547;$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3,606} = 0,8321.$$

2. Освобождаемся от связей, изображаем план сил, отражающий данное напряженное состояние (рис. 3.7).

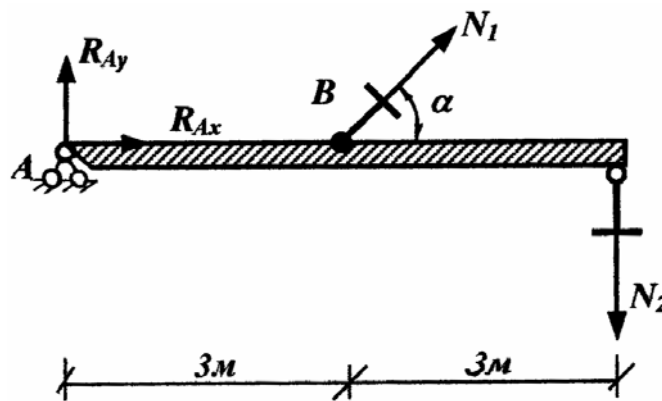


Рис. 3.7

Всего неизвестных 4 (R_{Ax} , R_{Ay} , N_1 , N_2), а независимых уравнений статики можно составить только 3. Следовательно, данная система один раз статически неопределима.

Составим уравнение равновесия, включающее в себя неизвестные N_1 и N_2 .

$$\sum M_A = 0. \quad -3N_1 \cdot \sin \alpha + 6N_2 = 0;$$

$$-3 \cdot 0,5547N_1 + 6N_2 = 0.$$

$$N_1 = 3,6056N_2 \quad (1)$$

3. Изобразим диаграмму перемещений, согласованную с напряженным состоянием системы, и составим дополнительное уравнение совместности деформаций (рис. 3.8).

Из подобия треугольников

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{или} \quad \delta_C = 2\delta_B, \quad (2)$$

но $\delta_C = \Delta - \Delta l_2$, а $\delta_B = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{0,5547}$.

После подстановки δ_C и δ_B в выражение (2) получим

$$\Delta - \Delta l_2 = \frac{2\Delta l_1}{0,5547},$$

или

$$\Delta - \Delta l_2 = 3,6056\Delta l_1 \quad (3)$$

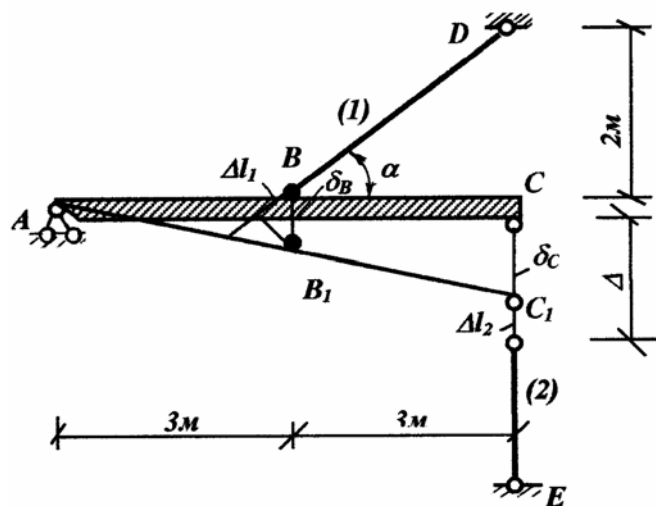


Рис. 3.8

4. В уравнение совместности деформаций (3) подставим значения абсолютных деформаций Δl_1 и Δl_2 , выраженных по закону Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 360,6}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,001803 \cdot N_1.$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} = 0,0006666 N_2.$$

$$0,20 - 0,0006666 N_2 = 3,6056 \cdot 0,001803 N_1;$$

$$0,0006666 N_2 + 0,006501 N_1 = 0,01.$$

5. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях стержней.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{29,913}{10} = 2,9913 \text{ кН/см}^2 = 29,913 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8,296}{15} = 0,553 \text{ кН/см}^2 = 5,53 \text{ МПа}$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Для ступенчатых брусьев, заключенных между двумя жесткими заделками, изображенных на рис. 3.9, построить эпюры N , σ , δ .

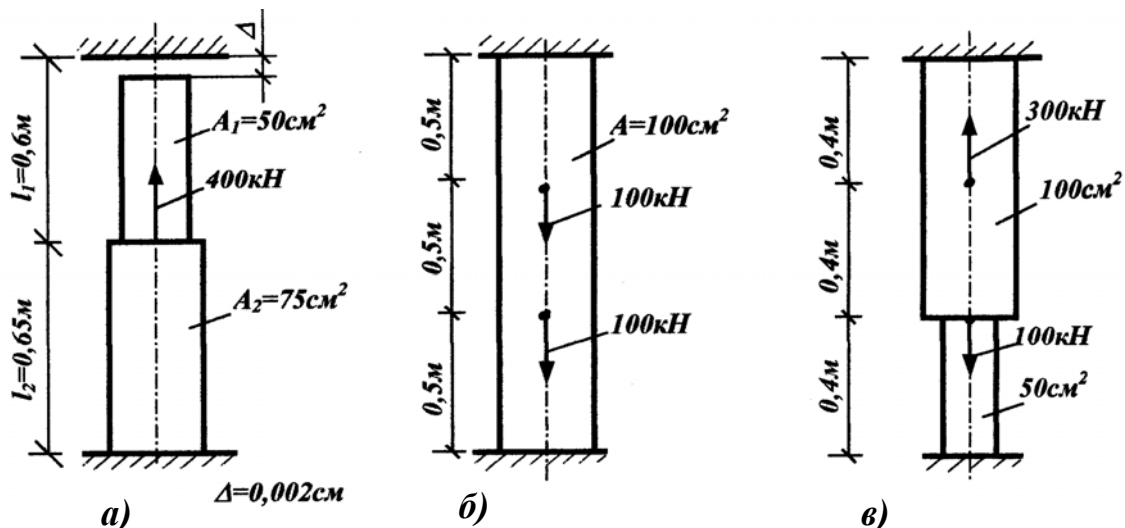


Рис. 3.9

Задание 2

Для стержневых систем, изображенных на рис. 3.10 определить величину допускаемой нагрузки из условия прочности по допускаемым напряжениям. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

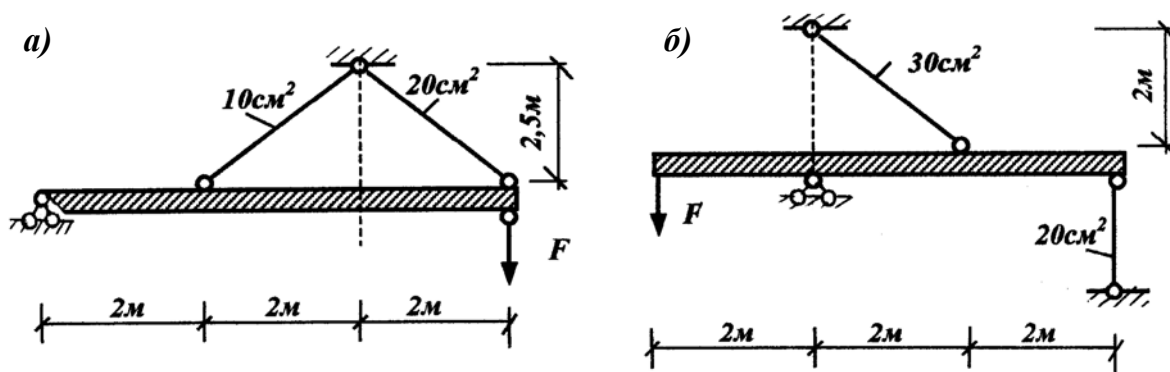


Рис. 3.10

ТЕМА № 4

Практические расчеты на срез и смятие

Цель занятия: закрепить полученные теоретические сведения и выработать практические приемы по расчету заклепочных и сварных соединений, работающих на срез

На срез рассчитывают в основном различные соединительные элементы конструкций, в частности, штифты, заклепки, болты (точно пригнанные к отверстиям), а также сварные соединения валиковыми (угловыми) швами и соединения элементов деревянных конструкций.

Условие прочности при расчете по допускаемым напряжениям выражается формулой

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau_{cp}],$$

где τ_{cp} – расчетное напряжение среза (среднее касательное напряжение в сечении);

Q – поперечная (сдвигающая) сила;

A_{cp} – расчетная площадь среза;

$[\tau_{cp}]$ – допускаемое напряжение среза.

Детали, рассчитываемые на срез, и соединенные ими элементы конструкций во многих случаях должны рассчитываться также на смятие.

Расчет на смятие по допускаемым напряжениям выполняется по формуле

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}],$$

где $\sigma_{см}$ – расчетное напряжение смятия;

F – сила, передаваемая соединением;

$A_{см}$ – площадь сминаемой поверхности;

$[\sigma_{см}]$ – допускаемое напряжение смятия.

Условие прочности сварного соединения, работающего на срез, при расчете по допускаемым напряжениям имеет вид

$$\tau_{с} = \frac{Q}{A_{ш}} = \frac{Q}{0,7kl} \leq [\tau_{с}],$$

где Q – суммарная срезающая нагрузка;

l – длина периметра шва;

k – катет шва, обычно равен толщине привариваемого элемента;

$[\tau_{с}]$ – допускаемое напряжение на срез для сварных швов.

Рассмотрим расчет заклепочных и сварных соединений на конкретных примерах.

Пример 1

Два листа толщиной $t = 10$ мм соединены внахлестку шестью заклепками диаметром $d = 20$ мм (рис. 4.1). Определить величину допус-

каемых растягивающих усилий F и необходимую ширину листов b при допускаемых напряжениях: на растяжение $[\sigma] = 160$ МПа, на срез $[\tau] = 120$ МПа и на смятие $[\sigma_c] = 320$ МПа.

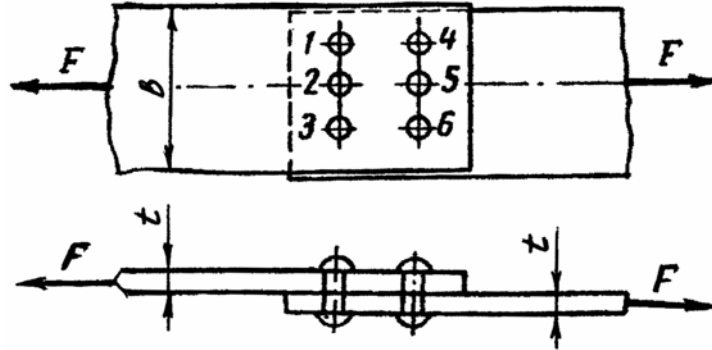


Рис. 4.1

1. Определим величину допускаемых растягивающих усилий F из условия прочности заклепочного соединения на срез.

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau].$$

Срезающая сила $Q = F$, а площадь среза для соединения внахлестку

$$A_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n,$$

где n – число заклепок

$$A_{cp} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 6 = 18,84 \text{ см}^2$$

$$[\tau] = 120 \text{ МПа} = 12 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$\frac{F}{A_{cp}} = [\tau].$$

Отсюда

$$F = A_{cp} \cdot [\tau] = 18,84 \cdot 12 \approx 226 \text{ кН}.$$

2. Определим величину допускаемых растягивающих усилий из условия прочности заклепочного соединения на смятие

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{A_{cm}} \leq [\sigma_{cm}].$$

Площадь смятия

$$A_{см} = t \cdot d \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}^2.$$

Отсюда

$$F = A_{см} [\sigma_{см}] = 12 \cdot 32 = 384 \text{ кН}.$$

3. Окончательно выберем величину допускаемых растягивающих усилий $F = 226 \text{ кН}$, определяющую условие прочности заклепочного соединения на срез.

4. Определим необходимую ширину листов b , исходя из условия прочности ослабленного заклепками сечения листа на растяжение.

$$\sigma = \frac{F}{A_{нетто}} \leq [\sigma].$$

$$A_{нетто} = t(b - 2d)$$

$$\frac{F}{t(b - 2d)} = [\sigma]$$

$$\frac{226}{1(b - 2 \cdot 2)} = 16; \quad 226 = 16b - 64; \quad b = \frac{226 + 64}{16} = 18,125 \text{ см} \approx 181 \text{ мм}$$

$$b = 181 \text{ мм}.$$

Пример 2

Стык двух листов сечением $10 \times 15 \text{ мм}$, перекрытый двумя накладками толщиной $t_1 = 6 \text{ мм}$ каждая, растягивается силами $F = 125 \text{ кН}$ (рис. 4.2). Проверить прочность заклепочного соединения, если с каждой стороны стыка поставлено по две заклепки диаметром $d = 20 \text{ мм}$, при допускаемых напряжениях: $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $[\tau] = 100 \text{ МПа} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $[\sigma_c] = 320 \text{ МПа} = 32 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

1. Проверим прочность заклепочного соединения на растяжение.

Наиболее опасным сечением будет сечение листа, ослабленного двумя отверстиями под заклепки, так как толщина листа $t = 10 \text{ мм}$ меньше толщины двух накладок $t_1 = 6 \text{ мм}$ ($t < 2t_1$).

$$\sigma = \frac{F}{A_{нетто}} = \frac{F}{(b - 2d)t} = \frac{125}{15 - 2 \cdot 2} = 11,36 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 113,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Прочность на растяжение обеспечена.

2. Проверим прочность заклепочного соединения на срез.

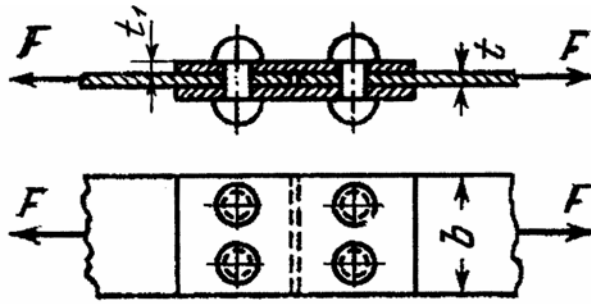


Рис. 4.2

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{A_{ср}} = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot n} \leq [\tau],$$

где n – число заклепок по одну сторону от стыка ($n = 2$)

$$\tau_{ср} \frac{2F}{\pi a^2 \cdot n} = \frac{2 \cdot 125}{3,14 \cdot 2^2 \cdot 2} = 9,952 \text{ кН/см}^2 = 9952 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Прочность заклепочного соединения на срез обеспечена.

3. Проверим прочность заклепочного соединения на смятие. Наиболее опасным на смятие является место контакта соединяемого листа с заклепкой ($t \leq 2t_1$)

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} = \frac{F_{см}}{dt \cdot n} \leq [\sigma_c]$$

$$\sigma_{см} = \frac{125}{2 \cdot 1 \cdot 2} = 31,25 \text{ кН/см}^2 = 312,5 \text{ МПа} \leq [\sigma_c] = 320 \text{ МПа}.$$

Прочность заклепочного соединения на смятие также обеспечена.

Следовательно, прочность заклепочного соединения обеспечена в целом.

Пример 3

Определить необходимую длину фланговых швов для соединения внахлестку двух полос сечением 10×80 мм и 10×100 мм (рис. 4.3), растягиваемых продольными силами F . Допускаемые напряжения принять: на растяжение полос $[\sigma] = 160$ МПа, на срез швов $[\tau_s] = 90$ МПа. Учесть возможный непровар в начале и в конце каждого шва по 5 мм. ($l = l_{расч} + 2 \times 5$ мм).

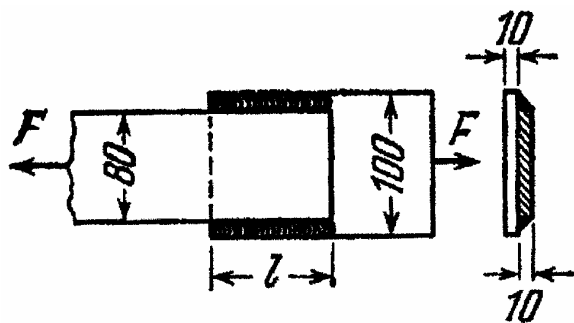


Рис. 4.3

Определим допускаемую величину растягивающих усилий F из условия прочности полосы сечением 80×10 на растяжение.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{8 \cdot 1} \leq [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$$

$$F = 8 \cdot 16 = 128 \text{ кН}$$

1. Определим расчетную длину фланговых швов из условия прочности на срез

$$\tau = \frac{F}{0,7kl} \leq [\tau_s];$$

$$l = 2l_{p.ф.}; \quad k = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см}; \quad [\tau_s] = 90 \text{ Мпа} = 9 \text{ кН/см}^2.$$

Отсюда

$$2l_{p.ф.} \geq \frac{F}{0,7k[\tau_s]} = \frac{128}{0,7 \cdot 1 \cdot 9} \approx 20,4 \text{ см.}$$

Расчетная длина одного флангового шва $l_{p.ф.} = 10,2$ см. Действительную длину флангового шва необходимо принять равной

$$l = l_{p.ф.} + 2 \cdot 0,5 = 10,2 + 1 = 11,2 \text{ см.}$$

Пример 4

Стальная полоса с размерами сечения $b = 0,1$ м и $t = 0,01$ м, растягиваемая усилием $F = 150$ кН, приваривается к фасонному листу внахлестку одним лобовым и двумя фланговыми швами (рис. 4.4). Определить наименьшую длину фланговых швов, необходимую для прикрепления полосы к фасонке, при допускаемых напряжениях на срез швов $[\tau_s] = 90$ Мпа.

Проверка прочности лобовых швов условно производится на срез. Принято считать,

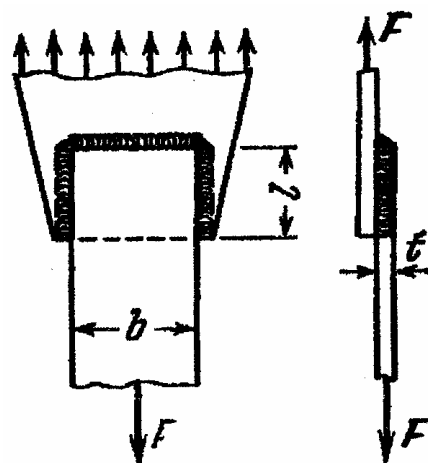


Рис. 4.4

что усилие, воспринимаемое всеми швами, равномерно распределяется по рабочему сечению. Следовательно

$$\tau_s = \frac{F}{0,7k(b + 2l_p)} \leq [\tau_s].$$

Отсюда расчетная длина флангового шва

$$l \geq \frac{1}{2} \left(\frac{F}{0,7k[\tau_s]} - b \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{150}{0,7 \cdot 1 \cdot 9} - 10 \right) = 6,9 \text{ см.}$$

Проектную длину шва (при учете ослабления непроваром только на одном конце) следует принять

$$l = l_p + 0,5 = 6,9 + 0,5 = 7,4 \text{ см.}$$

Пример 5

Определить допускаемую величину растягивающих усилий для двух полос сечением 150×10 , соединенных стыковым сварным швом (рис. 4.5). Принять допускаемое напряжение на разрыв сварного шва $[\sigma_s] = 140 \text{ МПа} = 14 \text{ кН/см}^2$.

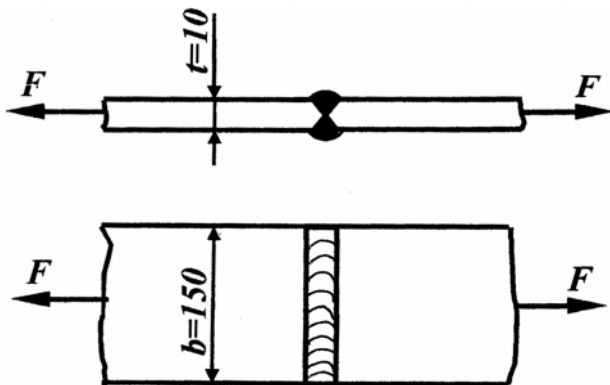


Рис. 4.5

Стыковые швы работают на растяжение. Условие прочности шва на растяжение

$$\sigma = \frac{F}{A_{ш}} \leq [\sigma_{ш}].$$

Площадь поперечного сечения шва считают равной

$$A_{ш} = tl_{расч.}$$

В нашем примере $t = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см}$,

$$l_{расч.} = b - 2 \cdot 0,5 = 15 - 2 \cdot 0,5 = 14 \text{ см,}$$

$$A_{ш} = 1 \cdot 14 = 14 \text{ см}^2.$$

Допускаемая величина растягивающих усилий

$$F = A_{ш} \cdot [\sigma] = 14 \cdot 14 = 196 \text{ кН.}$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи:

1. Два листа сечением 100×6 соединены внахлестку заклепками диаметром $d = 14$ мм и воспринимают растягивающие усилия $F = 60$ кН. Определить необходимое количество заклепок и проверить соединяемые листы на прочность, если допускаемые напряжения равны: $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 90$ МПа, $[\sigma_c] = 320$ МПа.

2. Два листа толщиной $t = 10$ мм соединяются встык с накладками толщиной $t_1 = 4$ мм заклепками $d = 20$ мм. Заклепочное соединение подвержено растяжению силами $F = 90$ кН. Определить необходимое число заклепок и ширину листов, если $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau_s] = 90$ МПа, $[\sigma_c] = 320$ МПа.

3. К фасонке присоединен швеллер № 20 при помощи фланговых швов с катетом $k = 5$ мм. Определить допускаемую величину растягивающих усилий и длину фланговых швов, если $[\sigma] = 160$ МПа, а $[\tau_s] = 90$ МПа.

4. Для сварного соединения, изображенного на рис. 4.4, при $b = 120$ мм, $t = 12$ мм и $l = 10$ см определить допускаемую величину растягивающей нагрузки F .

ТЕМА № 5

Кручение брусьев круглого поперечного сечения

Цель занятия: Освоить практические приемы по определению внутренних усилий, напряжений, расчету на прочность и жесткость при кручении.

Для определения внутренних усилий (крутящих моментов) используется метод сечений. Знак крутящего момента принципиального значения не имеет, а по модулю он численно равен алгебраической сумме моментов внешних скручивающих моментов, расположенных по одну сторону сечения относительно оси бруса.

Напряжение в любой точке поперечного сечения в виде круга или кольца определяется по формуле

$$\tau = \frac{T_k}{J_\rho} \cdot \rho,$$

где T_k – крутящий момент в данном сечении;

J_ρ – полярный момент инерции сечения;

ρ – расстояние от центра тяжести (полюса) сечения до данной точки.

Полярный момент инерции для сплошного круглого сечения равен:

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Для кольцевого круглого сечения с наружным диаметром D и внутренним d полярный момент инерции

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \text{ где } c = \frac{d}{D}.$$

Условие прочности при кручении по допускаемым напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\kappa}|_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \text{ где}$$

$|T_{\kappa}|_{\max}$ – максимальный по модулю крутящий момент;

W_{ρ} – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;

$[\tau]$ – допускаемое напряжение при расчете на кручение.

Для круглого сплошного сечения вала полярный момент сопротивления

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16},$$

а для кольцевого с наружным диаметром D и внутренним d

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4).$$

Если расчет выполняется по предельным состояниям, то крутящий момент определяется от расчетных значений внешних скручивающих моментов, а вместо допускаемого касательного напряжения подставляется расчетное сопротивление на срез.

Угол закручивания φ для вала постоянного поперечного сечения

$$\varphi = \frac{T_{\kappa} l}{G J_{\rho}}.$$

Относительный угол закручивания (на 1 м длины)

$$\theta = \frac{T_{\kappa}}{G J_{\rho}} \text{ (рад)}$$

при подстановке T_{κ} в Нм, G в Па, J_{ρ} в м⁴.

$$\theta^{\circ} = \frac{T_{\kappa}}{G J_{\rho}} \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Условие жесткости вала $\theta^\circ \leq [\theta^\circ]$.

Рассмотрим расчет вала на конкретных примерах.

Пример 1

Вал постоянного круглого сечения (рис. 5.1) нагружен внешними скручивающими моментами M_1, M_2, M_3, M_4 . Значения трех моментов приведены на рисунке. Требуется:

1) определить величину скручивающего момента, значение которого не указано на рис. 5.1;

2) определить величину крутящих моментов T_k и построить эпюру изменения их по длине вала;

3) определить требуемый диаметр поперечного сечения вала, если допускаемое напряжение при кручении $[\tau] = 50$ МПа ;

4) построить эпюру углов закручивания относительно левого крайнего сечения;

5) определить наибольший относительный угол закручивания и сравнить его с допускаемым, приняв его значение $[\theta^\circ] = 1,5$ град/м;

6) при необходимости подобрать диаметр поперечного сечения вала из условия жесткости при кручении.

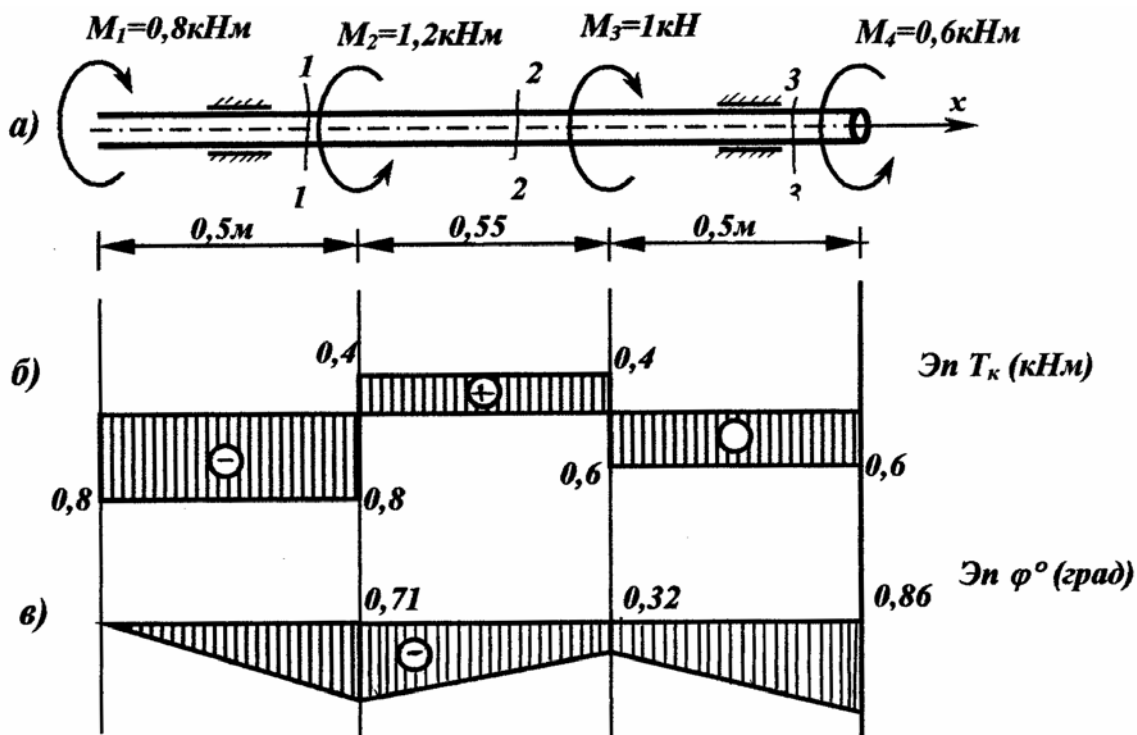


Рис. 5.1

1. Определим величину внешнего скручивающего момента M_4 из условия равновесия вала.

$$\sum M_x = 0 \quad -0,8 + 1,2 - 1 + M_4 = 0 \quad M_4 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Используя метод сечений, определим величину крутящих моментов по участкам вала. За положительное направление крутящего момента примем его действие по часовой стрелке. Следовательно, если смотреть со стороны свободного конца вала, все внешние скручивающие моменты, действующие по часовой стрелке, вызывают положительный крутящий момент.

$$T_{1\kappa} = -M_1 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$T_{2\kappa} = -M_1 + M_2 = -0,8 + 1,2 = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$T_{3\kappa} = -M_4 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На основании выполненных расчетов строим эпюры T_κ (рис. 5.1, б).

3. Из условия прочности вала на кручение определим требуемый диаметр поперечного сечения.

$$\tau_{\max} = \frac{|T_\kappa|_{\max}}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Из эпюры T_κ значение $|T_\kappa|_{\max} = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м} = 80 \text{ кН} \cdot \text{см}$.

Полярный момент сопротивления для круглого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ а } [\tau] = 50 \text{ МПа} = 5 \text{ кН/см}^2.$$

$$\tau_{\max} = \frac{16|T_\kappa|_{\max}}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Отсюда получаем

$$d = \sqrt[3]{\frac{16|T_\kappa|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 80}{3,14 \cdot 5}} = 4,34 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 45 \text{ мм}$.

4. Определим жесткость вала при кручении GJ_ρ .

$$GJ_\rho = G \frac{\pi d^4}{32} = 8 \cdot 10^3 \cdot \frac{3,14 \cdot 4,5^4}{32} = 321899 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

5. Определим углы закручивания границ участков относительно левого крайнего сечения.

$$\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_1 = \frac{T_{1к} \cdot l_1}{GJ_\rho} = -\frac{0,8 \cdot 100 \cdot 50}{321899} = -0,0124 \text{ рад} = -0,71^\circ$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{T_{2к} \cdot l_2}{GJ_\rho} = -0,0124 + \frac{0,4 \cdot 100 \cdot 55}{321899} = -0,0124 + 0,0068 = \\ &= -0,0056 \text{ рад} = -0,32^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_2 + \frac{T_{3к} \cdot l_3}{GJ_\rho} = -0,0056 - \frac{0,6 \cdot 100 \cdot 50}{321899} = -0,0056 - 0,0093 = \\ &= -0,0149 \text{ рад} = -0,86^\circ. \end{aligned}$$

На основании выполненных расчетов строим эпюру углов закручивания φ° (рис.5.1, в).

6. Определим наибольший относительный угол закручивания. Он будет с наибольшим по модулю крутящим моментом. В нашем примере это первый участок с $|T_{к}|_{\max} = 0,8 \text{ кНм} = 80 \text{ кН} \cdot \text{см}$.

$$\theta_{\max}^\circ = \frac{|T_{к}|_{\max} \cdot 100}{GJ_\rho} \cdot \frac{180}{3,14} = \frac{80 \cdot 100 \cdot 180}{321899 \cdot 3,14} = 1,425 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta^\circ] = 1,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Условие жесткости для вала выполняется.

Наибольший относительный угол закручивания можно было бы определить и по эпюре углов закручивания.

$$\theta_{\max}^\circ = \frac{|\varphi_1 - \varphi_0|}{l_1} = \frac{0,71 - 0}{0,5} = 1,42 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Пример 2

Полый стальной вал передает мощность 30 кВт при вращении со скоростью 500 об/мин. Определить размеры поперечного сечения вала при отношении внутреннего диаметра d к наружному D $d/D = 0,6$, если допустимое напряжение на кручение $[\tau] = 30 \text{ МПа}$ и допустимый относительный угол закручивания $[\theta^\circ] = 0,8 \text{ град/м}$.

1. Определим угловую скорость вращения вала

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,33 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

2. Определим величину крутящего момента в поперечном сечении вала

$$T_{к} = \frac{N}{\omega} = \frac{30 \cdot 1000}{52,33} = 573,25 \text{ Н} \cdot \text{м} = 573,25 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

3. Из условия прочности при кручении определяем необходимые размеры поперечного сечения полого вала

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Полярный момент сопротивления полого круглого вала с соотношением $\frac{d}{D} = C$ равен

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - C^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,6^4) = 0,1708 D^3$$

С учетом этого условие прочности примет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa}}{0,1708 D^3} \leq [\tau] \quad [\tau] = 30 \text{ МПа} = 30 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{T_{\kappa}}{0,1708 [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{573,25 \cdot 10^3}{0,1708 \cdot 30}} = 48,2 \text{ мм} \approx 50 \text{ мм}$$

Принимаем $D = 50 \text{ мм}$ и $d = 50 \cdot 0,6 = 30 \text{ мм}$.

4. Из условия жесткости при кручении определим необходимые размеры поперечного сечения

$$\theta^{\circ} = \frac{T_{\kappa} \cdot 1000}{G J_{\rho}} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta^{\circ}].$$

При такой записи условия жесткости предполагается, что крутящий момент выражен в Н·мм, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2$.

Полярный момент инерции поперечного сечения

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - 0,6^4) = 0,0854 D^4.$$

$$\theta^{\circ} = \frac{T_{\kappa} \cdot 1000}{G \cdot 0,0854 D^4} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta^{\circ}]$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot T_{\kappa} \cdot 1000}{\pi G \cdot 0,0854 [\theta^{\circ}]}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 573,25 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,0854 \cdot 0,8}} = 49,52 \text{ мм} \approx 50 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $D = 50 \text{ мм}$, $d = 30 \text{ мм}$.

Пример 3

Стальной стержень прямоугольного сечения с размерами сторон 2 см и 3 см (рис. 5.2) загружен двумя скручивающими моментами по 200 Нм. Вычислить минимальную величину касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении у поверхности стержня, и определить величину угла закручивания стержня при его длине 1 м.

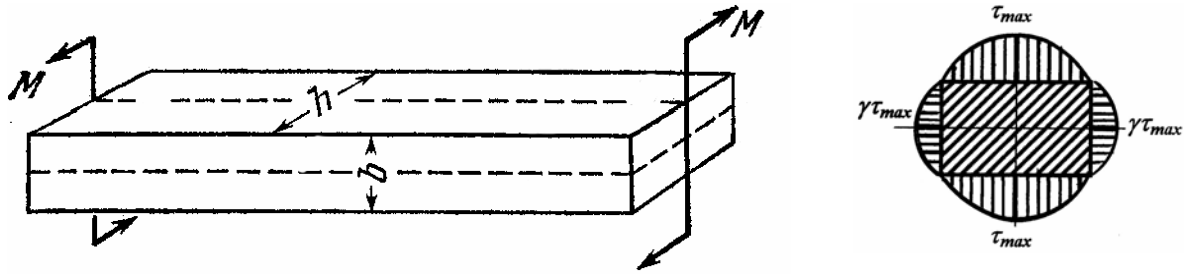


Рис. 5.2

При расчетах на кручение стержней прямоугольного сечения пользуются следующими данными:

– момент инерции прямоугольника при кручении $J_k = \alpha b^4$, где b – меньшая сторона прямоугольника;

– момент сопротивления прямоугольника при кручении $W_k = \beta b^3$;

– наибольшее касательное напряжение, возникающее в сечении по середине длинной стороны $\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_k}$;

– наибольшее касательное напряжение посередине короткой стороны $\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max}$;

– коэффициенты α , β , γ зависят от отношения n/b .

Значения этих коэффициентов приведены в таблице

n/b	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
α	0,140	0,294	0,375	0,457	0,622	0,790	1,123	1,789	2,456	3,123
β	0,208	0,346	0,418	0,493	0,645	0,801	1,128	1,789	2,456	3,123
γ	1,0	0,895	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

Для данной задачи $n/b = \frac{3}{2} = 1,5$. Находим по таблице значения коэффициентов: $\alpha = 0,294$, $\beta = 0,346$ и $\gamma = 0,859$. Тогда

$$W_k = \beta b^3 = 0,346 \cdot 2^3 = 2,768 \text{ см}^3 = 2,768 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$J_{\kappa} = \alpha b^4 = 0,294 \cdot 2^4 = 4,704 \text{ см}^4 = 4,704 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Крутящий момент $T_{\kappa} = M = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} посередине большой стороны

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa}}{W_{\kappa}} = \frac{200}{2,768 \cdot 10^{-6}} = 72,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 72,25 \text{ МПа}.$$

Напряжение посередине короткой стороны

$$\tau'_{\max} = \gamma \tau_{\max} = 0,859 \cdot 72,25 = 62,06 \text{ МПа}.$$

Угол закручивания вала на длине 1 м

$$\varphi = \frac{T_{\kappa} \cdot l}{GJ_{\kappa}} = \frac{200 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,704 \cdot 10^{-8}} = 0,0531 \text{ рад} = 3,05^{\circ}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи:

1. Напряжения у поверхности вала $\tau_{\max} = 80 \text{ МПа}$. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала?

2. При испытании на кручение стального образца длиной 200 мм и диаметром 20 мм установлено, что при крутящем моменте 163,2 Н·м угол закручивания равен 0,026 рад. Предел упругости достигнут при крутящем моменте 270 Н·м. Определить величины модуля упругости при сдвиге и предела упругости при кручении.

3. К стальному валу приложены крутящие пары сил: $M_1 = 1142 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_2 = 2716 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $M_3 = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Длины участков вала показаны на рис. 5.3. диаметр крайних участков вала 40 мм; диаметр вала на среднем участке 60 мм. Построить эпюру крутящего момента и график нарастания угла закручивания, отсчитываемого от левого торцевого сечения 1 вала. Подсчитать, чему равны касательные напряжения у поверхности вала на каждом его участке и угол закручивания вала между сечениями 2 и 4?

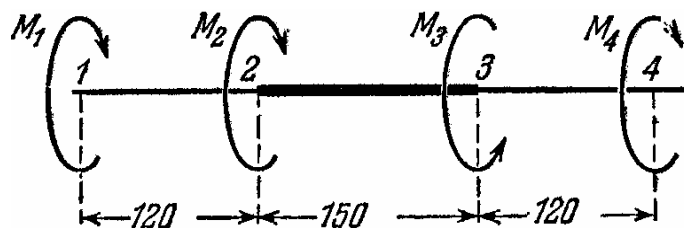


Рис. 5.3

4. Определить диаметр сплошного стального вала, передающего мощность 70 кВт при 180 об/мин, при допуске напряжении 48 МПа и допуске угле закручивания 1° на метр длины вала.

ТЕМА № 6

Построение эпюр внутренних усилий при прямом поперечном изгибе

Цель занятия: изучить приемы и выработать навыки для построения эпюр внутренних усилий при прямом поперечном изгибе.

В основе определения внутренних усилий при изгибе балки лежит метод сечений, позволяющий внутренние усилия определять через внешние нагрузки. При изгибе балок возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Если поперечная сила отсутствует, то изгиб называется чистым.

Изгибающий момент для плоской системы – это главный момент всех внутренних сил относительно нейтральной оси, которая совпадает с главной центральной осью поперечного сечения.

$$M_z = \int_A \sigma_y \cdot dA.$$

Поперечная сила для плоской системы – это главный вектор всех внутренних сил в сечении, по направлению совпадающий с вертикальной главной центральной осью поперечного сечения.

$$Q_y = \int_A \tau dA.$$

При определении изгибающего момента и поперечной силы через внешние нагрузки пользуются следующими правилами:

Изгибающий момент численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести этого сечения.

Изгибающий момент считается положительным, если нижнее волокно балки растягивается (рис. 6.1, а). При сжатии нижнего волокна изгибающий момент отрицательный (рис. 6.1, б).

Поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил на ось, перпендикулярную оси балки.

Поперечная сила считается положительной, если она стремится вращать сечение по часовой стрелке (рис. 6.2, а), в противном случае – отрицательной (рис. 6.2, б).

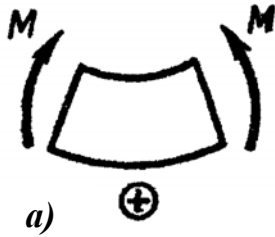


Рис. 6.1

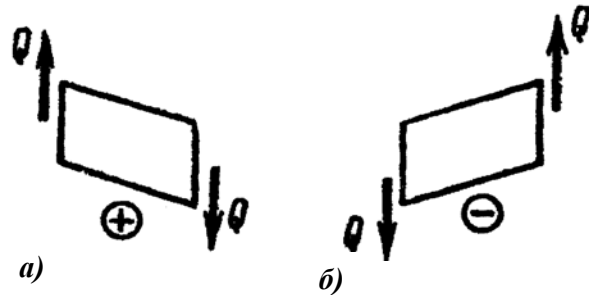


Рис. 6.2

Для контроля правильности построенных эпюр необходимо использовать дифференциальные зависимости между M , Q и q .

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx}; \quad q = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Рассмотрим порядок построения эпюр Q и M в балках на конкретных примерах.

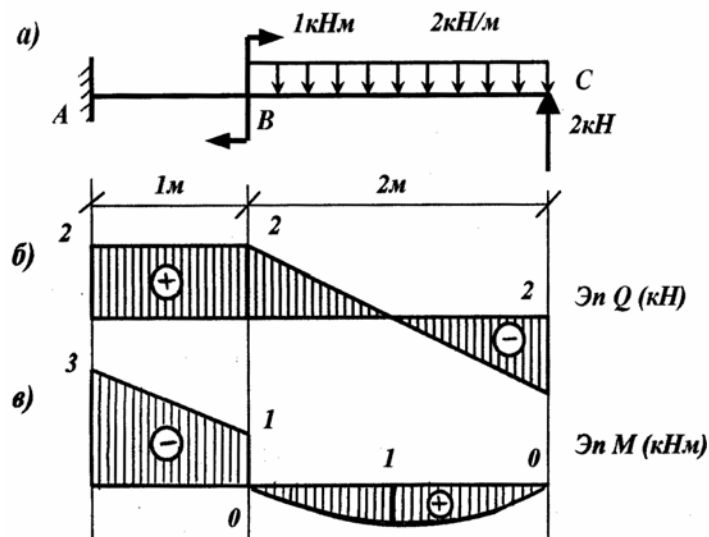


Рис. 6.3

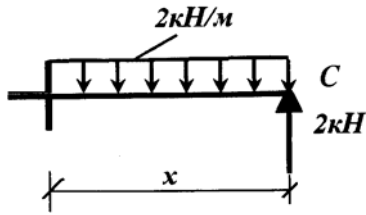
Пример 1

Построить эпюры M и Q для балки, изображенной на рис. 6.3, а.

Для консольной балки опорные реакции можно не определять, а внутренние усилия в поперечных сечениях можно определить через внешние нагрузки, расположенные правее от рассматриваемых сечений.

1. Запишем выражения для M и Q по участкам балки и определим их значения для характерных сечений. Границами участков будут места приложения нагрузок. При составлении аналитических выражений для M и Q можно использовать как общую, так и местную систему отсчета. Удобнее применение местной системы отсчета для каждого участка.

Участок СВ $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$



$$Q = -2 + 2x$$

Закон изменения линейный

$$x = 0, \quad Q = -2 \text{ кН};$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad Q = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

Поперечная сила на этом участке меняет знак, следовательно, функция изгибающего момента на этом участке имеет экстремум. Приравняв производную к функции изгибающего момента, т.е. функцию поперечной силы к нулю, определим значение x , при котором функция имеет экстремум.

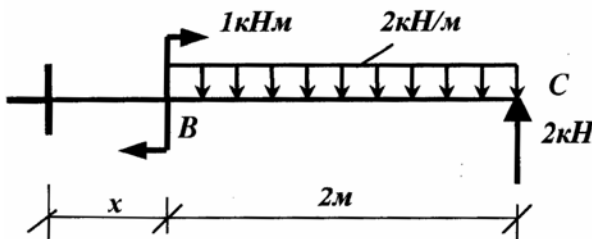
$$Q = -2 + 2x = 0, \quad x = 1 \text{ м}.$$

$$M = 2x - 2 \frac{x^2}{2} = 2x - x^2.$$

Закон изменения изгибающего момента по параболе. Для построения графика необходимо минимум три значения:

$$x = 0, \quad M = 0; \quad x = 2 \text{ м}, \quad M = 0; \quad x = 1 \text{ м}, \quad M_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \text{ кНм}.$$

Участок ВА $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$



$$Q = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН}$$

Поперечная сила постоянна на этом участке.

$$M = 2(2 + x) - 2 \cdot 2(1 + x) - 1 = 4 + 2x - 4 - 4x - 1 = -1 - 2x.$$

Закон изменения изгибающего момента линейный.

$$x = 0, \quad M = -1 \text{ кНм}; \quad x = 1 \text{ м}, \quad M = -3 \text{ кНм}.$$

2. На основании выполненных расчетов строим эпюры Q и M (рис. 6.3, б, в).

Эпюру изгибающих моментов строим со стороны растянутых волокон, т.е. положительные значения изгибающего момента откладываем вниз.

Пример 2

Для балки, изображенной на рис. 6.4, а, построить эпюры внутренних усилий и применить правила дифференциального контроля правильности построения эпюр Q и M .

1. Определим величину опорных реакций

$$\sum M_A = 0 \quad 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 - 6 - 6R_B = 0 \quad R_B = 6 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad -6 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 7 + 6R_A = 0 \quad R_A = 4 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum y = 1 \cdot 2 + 4 - 4 - 2 \cdot 4 + 7 = 12 - 12 = 0$

Реакции определены правильно.

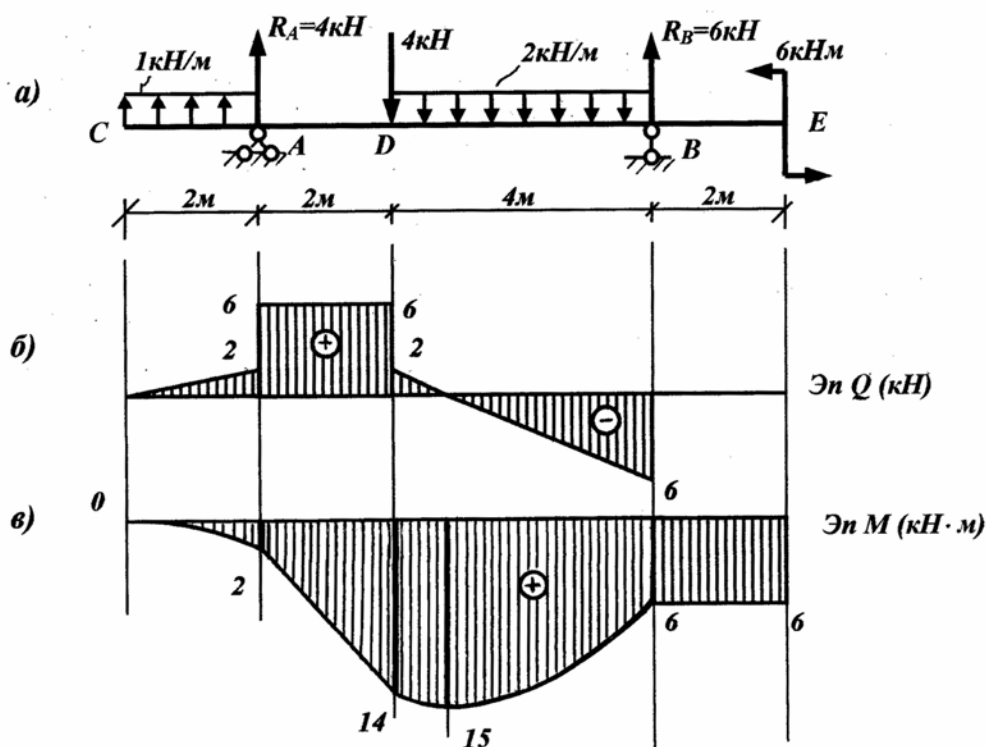
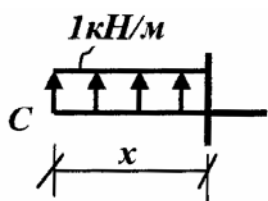


Рис. 6.4

2. Запишем аналитические выражения для внутренних усилий M и Q по участкам балки и вычислим их значения для характерных сечений.

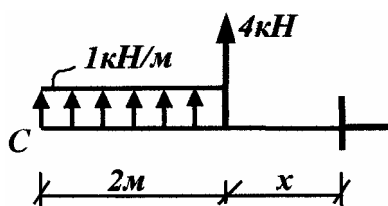
Участок CA $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$



$$Q = 1 \cdot x; \quad x = 0, Q = 0; \quad x = 2 \text{ м}, Q = 2 \text{ кН}$$

$$M = 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}; \quad x = 0, M = 0; \quad x = 2, M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок AD $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$

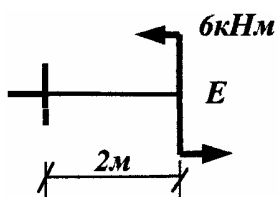


$$Q = 1 \cdot 2 + 4 = 6 \text{ кН}$$

$$M = 1 \cdot 2(1 + x) + 4x = 2 + 6x$$

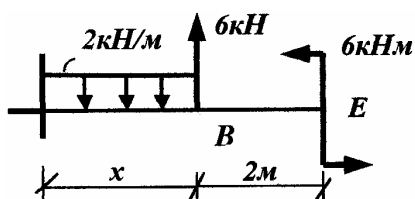
$$x = 0, M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad x = 2 \text{ м}, M = 14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок EB $0 \leq x \leq 2$ м



$$Q = 0, \quad M = 6 \text{ кНм}$$

Участок BD $0 \leq x \leq 4$ м



$$Q = -6 + 2x;$$

$$x = 0, \quad Q = -6 \text{ кН};$$

$$x = 4, \quad Q = 2 \text{ кН}.$$

Поперечная сила на этом участке меняет знак. Значит, существует экстремум для изгибающего момента.

$$Q = -6 + 2x = 0; \quad x = 3,0 \text{ м}.$$

$$M = 6 + 6x - 2 \frac{x^2}{2} = 6 + 6x - x^2.$$

$$x = 0, \quad M = 6 \text{ кНм};$$

$$x = 4 \text{ м}, \quad M = 6 + 24 - 16 = 14 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad M_{\max} = 6 + 6 \cdot 3 - 9 = 6 + 18 - 9 = 15 \text{ кНм}.$$

3. На основании выполненных расчетов строим эпюры M и Q для данной балки (рис. 6.4, б, в).

4. Выполним дифференциальный контроль правильности построения эпюр M и Q .

На участке CA , где имеется распределенная нагрузка, на эпюре Q должна быть наклонная прямая линия при положительном направлении распределенной нагрузки, причем при положительном значении Q изгибающий момент возрастает.

В сечении A , где приложена реакция $R_A = 4$ кН, на эпюре Q будет скачок на величину этой силы по направлению действия этой силы, а на эпюре M – излом в сторону действия этой силы.

На участке AD при отсутствии распределенной нагрузки на эпюре Q должны иметь постоянное значение, а на эпюре M – наклонную линию. При положительном значении Q значение изгибающего момента должно увеличиваться (наклонная линия – сверху вниз).

В сечении D , где действует сосредоточенная сила, равная 4 кН, на эпюре Q имеем скачок в сторону действия сосредоточенной силы, а на эпюре M – излом в сторону действия сосредоточенной силы.

На участке DB , где действует распределенная нагрузка, направленная вниз, эпюра имеет наклонную прямую линию сверху вниз, а на эпюре M – кривую линию, направленную выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки. Так как поперечная сила меняет знак, то на эпюре M имеется экстремум в том сечении, где поперечная сила равна нулю.

В сечении B , где приложена реакция $R_B = 6 \text{ кН}$, направленная вверх, на эпюре Q имеет место скачок по направлению действия реакции, а на эпюре M – излом с острием в сторону действия реакции.

На участке BE при отсутствии распределенной нагрузки значение поперечной силы постоянное (нулевое). При нулевом значении поперечной силы изгибающий момент имеет постоянное значение.

Пример 3

Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рис. 6.5, a .

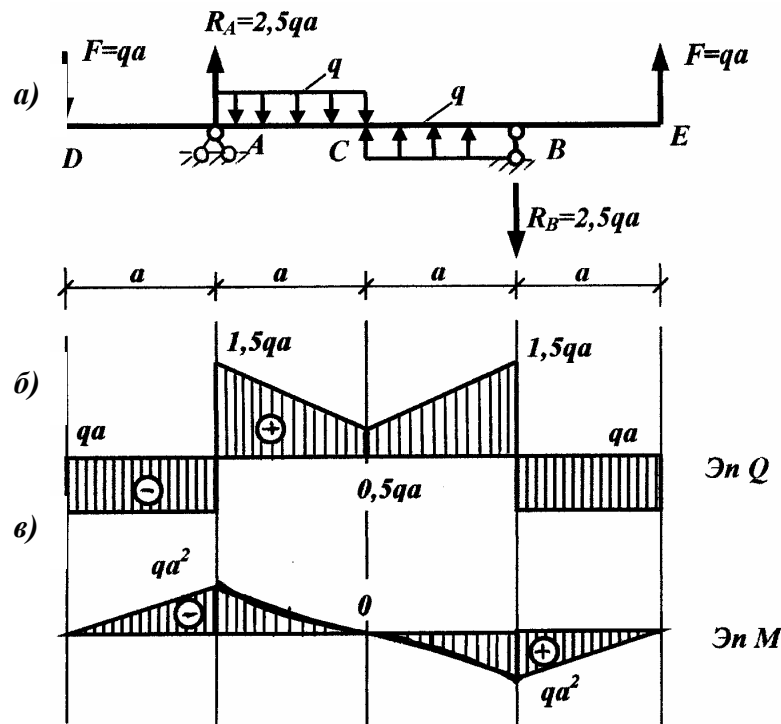


Рис. 6.5

1. Определим величину опорных реакций

$$\sum M_A = 0$$

$$-qa \cdot a + qa \cdot \frac{a}{2} - qa \cdot \frac{3}{2}a - qa \cdot 3a + 2aR_B = 0$$

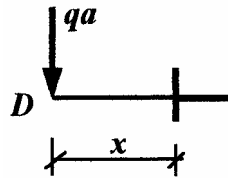
$$R_B = 2,5qa$$

$$\sum M_B = 0 \quad -qa \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot a \cdot \frac{3}{2}a - qa \cdot 3a + 2a \cdot R_A = 0$$

$$R_A = 2,5qa.$$

2. Запишем аналитические выражения для Q и M по участкам балки и вычислим их значения для характерных сечений.

Участок DA $0 \leq x \leq a$

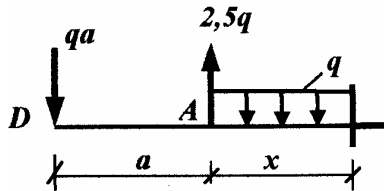


$$Q = -qa, \quad M = -qa \cdot x;$$

$$x = 0 \quad M = 0;$$

$$x = a \quad M = -qa^2.$$

Участок AC $0 \leq x \leq a$



$$Q = -qa + 2,5qa - qx = 1,5qa - qx$$

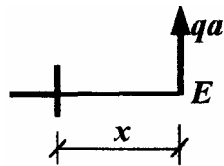
$$x = 0, \quad Q = 1,5qa;$$

$$x = a, \quad Q = 0,5qa.$$

$$M = -qa(a + x) + 2,5qa \cdot x - q \frac{x^2}{2} = -qa^2 + 1,5qax - \frac{qx^2}{2};$$

$$x = 0, \quad M = -qa^2; \quad x = a, \quad M = -qa^2 + 1,5qa^2 - 0,5qa^2 = 0.$$

Участок EB $0 \leq x \leq a$

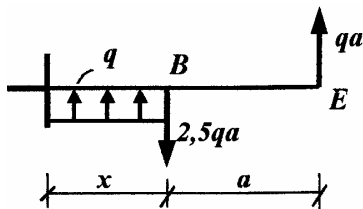


$$Q = -qa; \quad M = qax;$$

$$x = 0, \quad M = 0;$$

$$x = a, \quad M = qa^2$$

Участок BC $0 \leq x \leq a$



$$Q = -qa + 2,5qa - qx = 1,5qa - qx.$$

$$x = 0, \quad M = 1,5qa;$$

$$x = a, \quad Q = 0,5qa.$$

$$M = qa(a + x) - 2,5qa \cdot x + q \frac{x^2}{2} = qa^2 - 1,5qax + q \frac{x^2}{2}$$

$$x = 0, M = qa^2; \quad x = a, M = qa^2 - 1,5qa^2 + 0,5qa^2 = 0.$$

3. На основании выполненных расчетов строим эпюры Q и M (рис. 6.5, б, в).

Задания для самостоятельной работы

Построить эпюры M и Q для балок, изображенных на рис. 6.6.

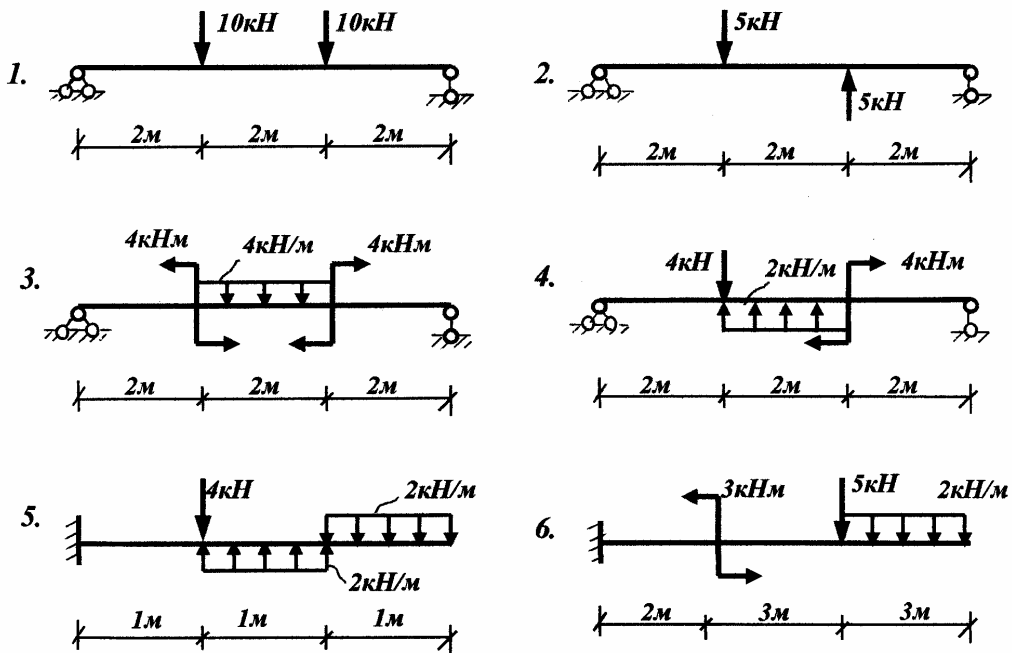


Рис. 6.6

ТЕМА № 7

Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе

Цель занятия: изучить методику определения напряжений в произвольных точках поперечных сечений бруса при прямом поперечном изгибе

Нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения при изгибе равно

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} \cdot y,$$

где M_z – изгибающий момент в поперечном сечении бруса;

J_z – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси;

y – расстояние от главной центральной оси до рассматриваемой точки.

Прочность при прямом поперечном изгибе определяется величиной нормальных напряжений. Условие прочности на изгибе при расчете по допускаемым напряжениям для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

При расчете на прочность при изгибе по предельным состояниям для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R,$$

где $|M_z|_{\max}$ – максимальный по модулю изгибающий момент, определенный при действии на балку нормативных нагрузок в расчете по допускаемым напряжениям, или максимальный по модулю изгибающий момент, определенный от расчетных нагрузок в расчете по предельным состояниям;

W_z – осевой момент сопротивления относительно нейтральной (главной центральной) оси;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение для данного материала балки;

R – расчетное сопротивление для данного материала балки.

Только в редких случаях необходимо проверять подобранное сечение по касательным напряжениям. Величина касательных напряжений в любой точке

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{omc}}{J_z \cdot b},$$

где Q – поперечная сила в сечении;

S_z^{omc} – статический момент площади части сечения, расположенной выше рассматриваемой точки, относительно нейтральной оси;

b – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$\tau_{\max} \leq [\tau]$ – при расчете по допускаемым напряжениям

или

$\tau_{\max} \leq R_s$ – при расчете по предельным состояниям.

Рассмотрим, как подбираются размеры различных поперечных сечений при прямом поперечном изгибе на конкретных примерах.

Пример 1

Для балки, изображенной на рис. 7.1, а, построить эпюры Q и M и подобрать размеры поперечных сечений, изображенных на рис. 7.1, б, в, г, д, е. Нагрузки заданы расчетные. Расчетное сопротивление $R = 210$ МПа.

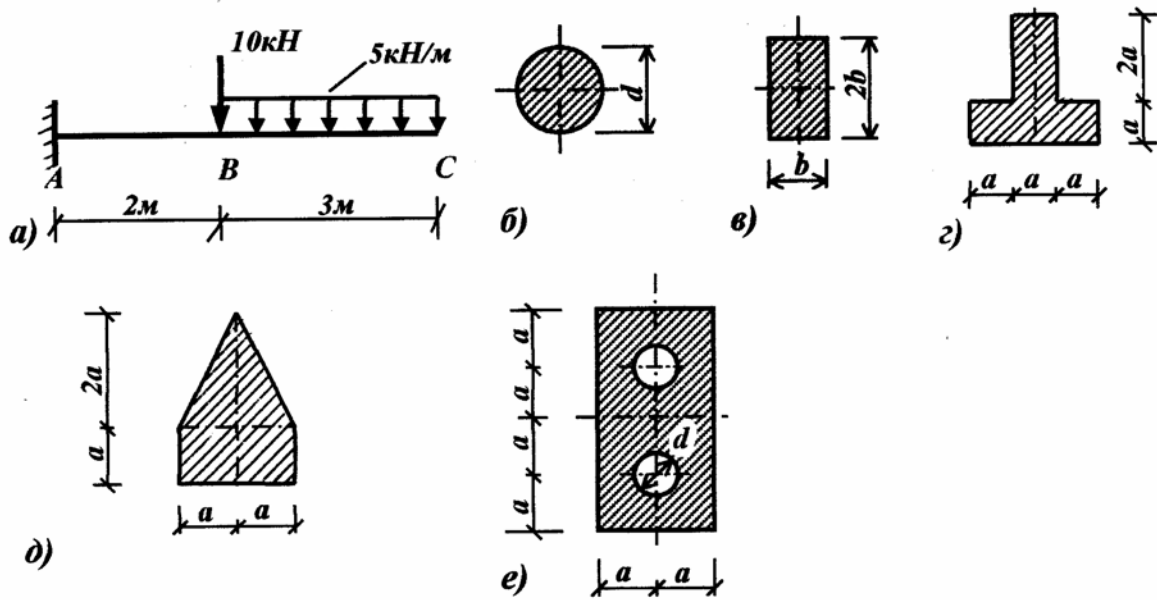
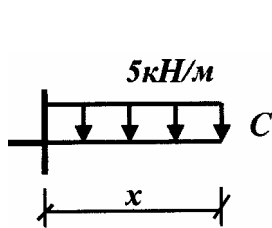


Рис. 7.1

1. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для заданной балки.

а) запишем выражения для M и Q по участкам балки

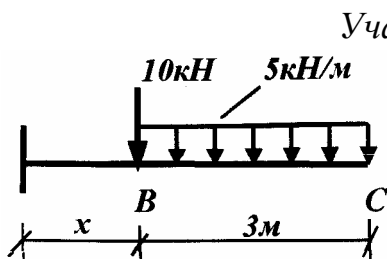


Участок CB $0 \leq x \leq 3$ м

$$Q = 5x; \quad x = 0, \quad Q = 0; \quad x = 3 \text{ м}, \quad Q = 15 \text{ кН.}$$

$$M = -5 \frac{x^2}{2} = -2,5x^2.$$

$$x = 0, \quad M = 0; \quad x = 3 \text{ м}, \quad M = -2,25 \text{ кНм.}$$



Участок BA $0 \leq x \leq 2$ м

$$Q = 3 \cdot 5 + 10 = 25 \text{ кН}$$

$$M = -3 \cdot 5(1,5 + x) - 10x = -22,5 - 25x$$

$$x = 0, \quad M = -22,5 \text{ кНм}; \quad x = 2 \text{ м}, \quad M = -72,5 \text{ кНм}$$

б) на основании выполненных расчетов строим эпюры Q и M (рис. 7.2, б, в).

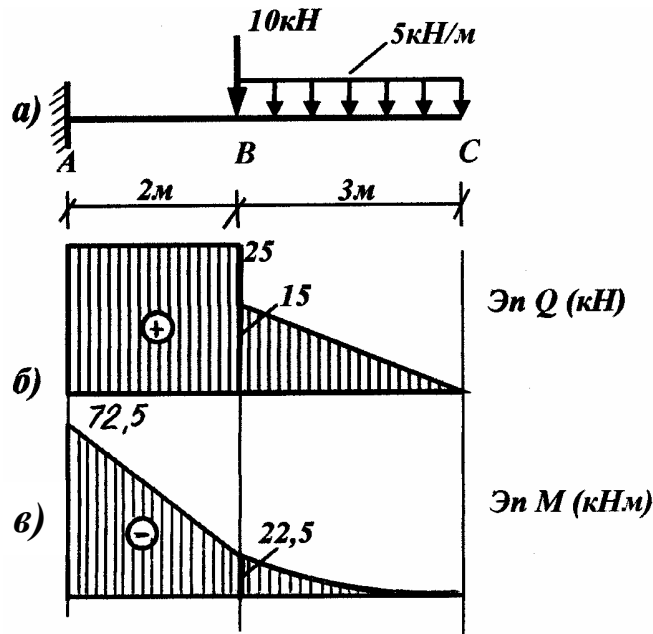


Рис. 7.2

2. Из условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям определим требуемый момент сопротивления поперечного сечения.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R.$$

Отсюда

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R}.$$

Из эпюры M

$$|M_z|_{\max} = 72,5 \text{ кНм} = 7250 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Расчетное сопротивление на растяжение при изгибе

$$R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2.$$

$$W_z \geq \frac{7250}{21} = 345,24 \text{ см}^3.$$

3. Подберем необходимые размеры поперечных сечений:

а) *круглое поперечное сечение*

Момент сопротивления круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Необходимый диаметр из этого равенства

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 345,24}{3,14}} = \sqrt[3]{3518,37} = 15,5 \text{ см.}$$

б) *прямоугольное поперечное сечение*

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3.$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_z}{2}} = \sqrt[3]{1,5W_z} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 345,24} = 8,05 \text{ см.}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 8,05 = 16,1 \text{ см.}$$

в) *сечение тавровое* (см. рис. 7.1, г)

Для этого сечения необходимо определить положение главных центральных осей. Так как сечение имеет одну ось симметрии, то положение одной главной центральной оси известно. Она и является главной центральной осью y .

Для определения положения второй главной центральной оси необходимо определить положение центра тяжести относительно произвольной оси z_1 (рис. 7.3).

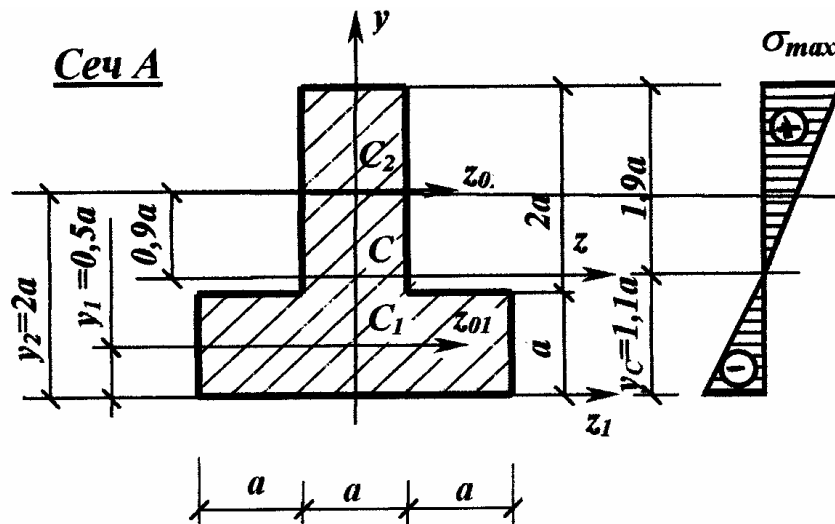


Рис.7.3

Сечение разбиваем на два прямоугольника

$$A_1 = a \cdot 3a = 3a^2;$$

$$A_2 = a \cdot 2a = 2a^2.$$

Площадь всего сечения

$$A = A_1 + A_2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2.$$

Статические моменты прямоугольников относительно оси z_1 равны:

$$S_{z_1}^{(1)} = A_1 \cdot y_1 = 3a^2 \cdot 0,5a = 1,5a^3.$$

$$S_{z_1}^{(2)} = A_2 \cdot y_2 = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3.$$

Статический момент всего сечения относительно z_1

$$S_{z_1} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = 1,5a^3 + 4a^3 = 5,5a^3.$$

Координата центра тяжести

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{5,5a^3}{5a^2} = 1,1a.$$

Координаты центров тяжести составляющих фигур относительно проведенных через центр тяжести главных центральных осей будут равны:

$$y_{1c} = y_1 - y_c = 0,5a - 1,1a = -0,6a;$$

$$y_{2c} = y_2 - y_c = 2a - 1,1a = 0,9a.$$

Значение осевого момента относительно главной центральной оси z

$$\begin{aligned} J_z &= J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = J_{z_{01}}^{(1)} + y_{1c}^2 A_1 + J_{z_{02}}^{(2)} + y_{2c}^2 A_2 = \\ &= \frac{3a \cdot a^3}{12} + (-0,6a)^2 \cdot 3a^2 + \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + (0,9a)^2 \cdot 2a^2 = \\ &= 0,25a^4 + 1,08a^4 + 0,667a^4 + 1,62a^4 = 3,617a^4. \end{aligned}$$

Момент сопротивления сечения

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{3,617a^4}{1,9a} = 1,904a^3.$$

Отсюда размер a равен

$$a = \sqrt[3]{\frac{W_z}{1,904}} = \sqrt[3]{\frac{345,24}{1,904}} = 5,66 \text{ см.}$$

$$a = 5,66 \text{ см.}$$

г) сечение (рис. 7.1, д)

Для этого сечения также необходимо определить положение главных центральных осей.

Положение главной центральной оси y совпадает с осью симметрии. Вторая главная центральная ось z перпендикулярна оси y и проходит через центр тяжести сечения. Определить координату центра тяжести сечения.

Разбиваем сечение на простейшие части (рис. 7.4).

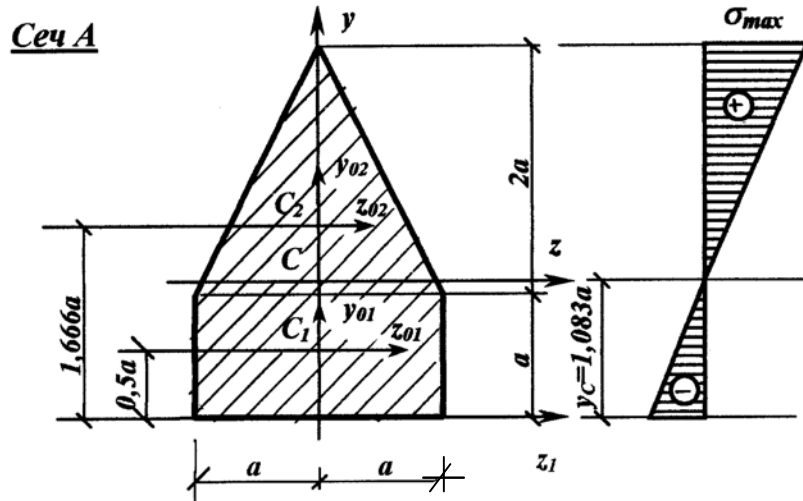


Рис. 7.4

$$A_1 = 2a \cdot a = 2a^2;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2.$$

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{2a^2 \cdot 0,5a + 2a^2 \cdot 1,666a}{2a + 2a} = 1,083a.$$

Через найденное положение центра тяжести проводим главную центральную ось z параллельно вспомогательной оси z_1 .

Определим значение момента инерции сечения относительно главной центральной оси z .

$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = J_{z_{01}}^{(1)} + y_{1c}^2 A_1 + J_{z_{02}}^{(2)} + y_{2c}^2 A_2.$$

Координаты центров тяжести составляющих фигур относительно главной центральной оси равны:

$$y_{1c} = y_1 - y_c = 0,5a - 1,083a = -0,583a;$$

$$y_{2c} = y_2 - y_c = 1,666a - 1,083a = 0,583a.$$

$$J_z = \frac{2a \cdot a^3}{12} + (-0,583a)^2 \cdot 2a + \frac{2a \cdot (2a)^3}{36} + (0,583a)^2 \cdot 2a =$$

$$= 0,1667a^4 + 0,6798a^4 + 0,4444a^4 + 0,6798a^4 = 1,9707a^4.$$

$$y_{\max} = 3a - y_c = 3a - 1,083a = 1,917a.$$

Момент сопротивления сечения относительно главной центральной оси z

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{1,9707a^4}{1,917a} = 1,028a^3.$$

Размер

$$a = \sqrt[3]{\frac{W_z}{1,028}} = \sqrt[3]{\frac{345,24}{1,028}} = 7,02 \text{ см.}$$

д) сечение (рис. 7.1, е)

Это сечение имеет две оси симметрии, а поэтому положение главных центральных осей инерции известно. Они совпадают с осями симметрии (рис. 7.5).

Площадь поперечного сечения

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$

$$A_1 = 2a \cdot 4a = 8a^2;$$

$$A_2 = A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = 0,785a^2.$$

Осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси z равен:

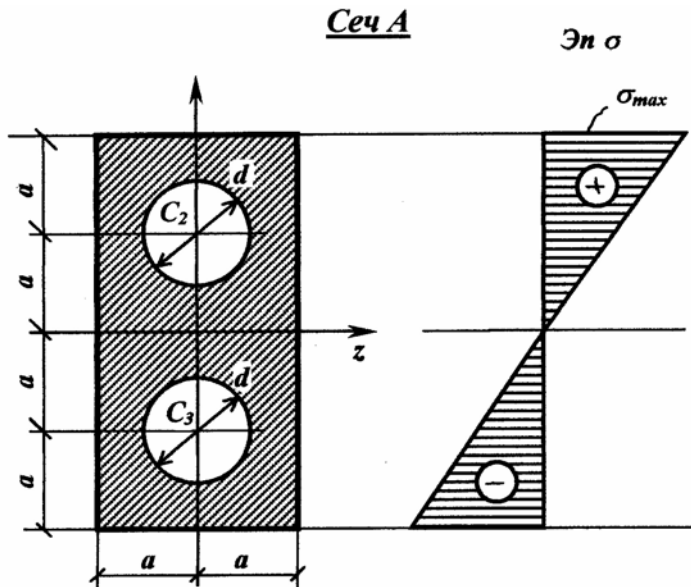


Рис. 7.5

$$J_z = J_z^{(1)} - J_z^{(2)} - J_z^{(3)} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} - \left(\frac{\pi \cdot d^4}{64} + a^2 \cdot A_2 \right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{2a(4a)^3}{12} - \left(\frac{\pi d^4}{64} + a^2 \cdot 0,785a \right) \cdot 2 = 10,6667a^4 - 1,6681a^4 = 8,9986a^4$$

Момент сопротивления поперечного сечения относительно нейтральной оси z

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{8,9986a^4}{2a} = 4,4993a^3.$$

Отсюда размер

$$a = \sqrt[3]{\frac{W_z}{4,4993}} = \sqrt[3]{\frac{345,24}{4,4993}} = 4,25 \text{ см.}$$

Пример 2

Для стальной балки, изображенной на рис. 7.6, а, построить эпюры Q и M , подобрать необходимые размеры поперечных сечений, составленных из прокатных профилей (рис. 7.6, б, в), построить эпюры σ и τ для опасных сечений в отношении нормальных и касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения. Нагрузки расчетные. Расчетные сопротивления: $R = 210 \text{ МПа}$ и $R_s = 130 \text{ МПа}$.

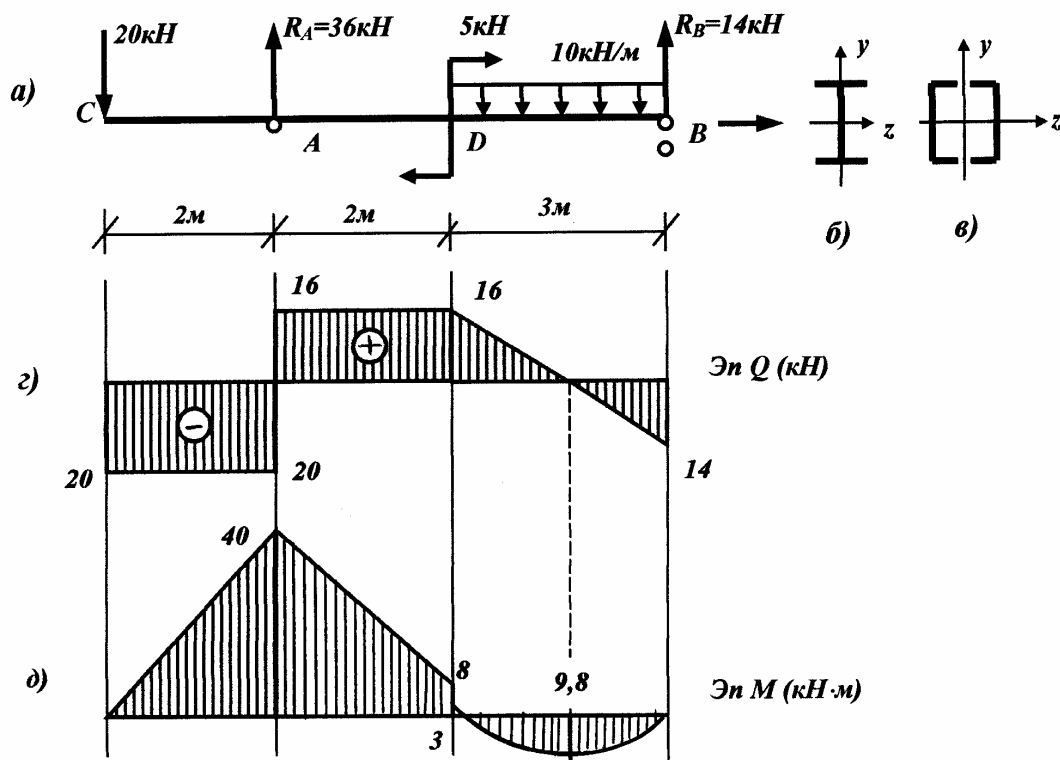


Рис. 7.6

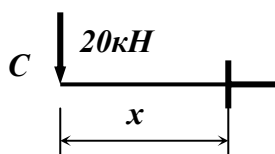
1. Определим величину опорных реакций в балке

$$\sum M_A = 0. \quad -20 \cdot 2 + 5 + 10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 5R_B = 0. \quad R_B = 14 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum y = -20 + 36 - 10 \cdot 3 + 1 = 50 - 50 = 0$.

2. Запишем аналитические выражения для Q и M по участкам балки и определим их значения для характерных сечений.

Участок CA $0 \leq x \leq 2$ м

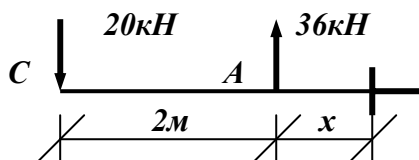


$$Q = -20 \text{ кН}; \quad M = -20x;$$

$$x = 0, \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad M = -40 \text{ кНм}.$$

Участок AD $0 \leq x \leq 2$ м



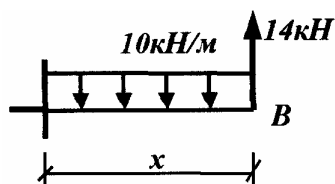
$$Q = -20 + 36 = 16 \text{ кН}.$$

$$M = -20(2 + x) + 36x = -40 + 16x.$$

$$x = 0, \quad M = -40 \text{ кНм};$$

$$x = 2, \quad M = -6 \text{ кНм}.$$

Участок BD $0 \leq x \leq 2$ м



$$Q = -14 + 10x;$$

$$x = 0, \quad Q = -14 \text{ кН};$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad Q = 16 \text{ кН}.$$

Поперечная сила на этом участке меняет знак. Значит, существует экстремум для изгибающего момента. Приравняв поперечную силу к нулю, определим сечение, в котором изгибающий момент будет иметь экстремальное значение.

$$Q = -14 + 10x = 0; \quad x = 1,4 \text{ м}.$$

$$M = 14x - 10 \frac{x^2}{2} = 14x - 5x^2.$$

$$x = 0, \quad M = 0; \quad x = 3 \text{ м}, \quad M = -3 \text{ кНм};$$

$$x = 1,4 \text{ м}, \quad M_{\max} = 14 \cdot 1,4 - 5 \cdot 1,4^2 = 9,8 \text{ кНм}.$$

3. На основании выполненных расчетов строим эпюры Q и M (рис. 7.6, з, д).

4. Анализируя эпюры Q и M , определяем опасные сечения балки. Таким сечением является сечение A_l (слева от опоры A), где

$$|M_z|_{\max} = 40 \text{ кНм} = 4000 \text{ кНсм} \text{ и } |Q|_{\max} = 20 \text{ кН.}$$

5. Определим требуемый момент сопротивления сечения из условия прочности при изгибе в расчете по предельным состояниям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R,$$

откуда

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{4000}{21} = 190,48 \text{ см}^3.$$

6. Определим необходимые размеры поперечных сечений:

а) двутавровое

Обращаемся к сортаменту прокатной стали и выбираем номер двутавра с моментом сопротивления близким к требуемому.

Наиболее близко подходят двутавр № 20 с $W'_z = 184 \text{ см}^3$ и двутавр № 20а с $W''_z = 203 \text{ см}^3$ по ГОСТ 8239-72.

При установке двутавра № 20 будет некоторое перенапряжение. Определим его величину.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W'_z} = \frac{4000}{184} = 21,74 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 217,4 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа.}$$

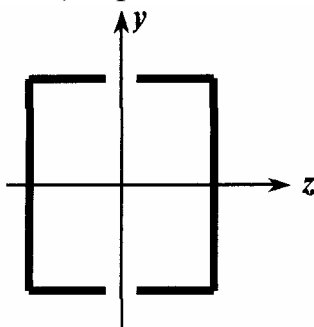
$$\% \text{ перенапр.} = \frac{217,4 - 210}{210} \cdot 100 = 3,52 \% > 3 \%.$$

Окончательно принимаем к установке двутавр № 20а с $W''_z = 203 \text{ см}^3$.

При его установке максимальные нормальные напряжения равны

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W''_z} = \frac{4000}{203} = 19,704 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 197,04 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.}$$

б) коробчатое из двух швеллеров



Для такого сечения

$$J_z = 2J_z^{\text{швел}} \text{ и } W_z^{\text{швел}} = \frac{W_z}{2} = \frac{190,48}{2} = 95,24 \text{ см}^3.$$

Тогда требуемый момент сопротивления швеллера

$$W_z^{\text{швел}} = \frac{W_z}{2} = \frac{190,48}{2} = 95,24 \text{ см}^3.$$

Обращаемся к сортаменту проката и выбираем необходимый номер швеллера. Наиболее близко подходят швеллер № 16 с $W'_z = 93,4 \text{ см}^3$ и швеллер № 16а с $W''_z = 103 \text{ см}^3$.

При установке швеллера № 16

$$W_z = 2W'_z = 2 \cdot 93,4 = 186,8 \text{ см}^3.$$

Максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{4000}{186,6} = 21,41 \text{ кН/см}^3 = 214,1 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа}.$$

$$\% \text{ перенапряж.} = \frac{214,1 - 210}{210} \cdot 100 = 1,95 \% < 3 \%.$$

Такое перенапряжение допустимо. Окончательно к установке принимаем балку коробчатого поперечного сечения, составленную из двух швеллеров № 16.

7. Построим эпюры σ и τ для опасного сечения A_n двутавровой балки.

Выпишем из сортамента прокатной стали все необходимые данные для двутавра № 20а.

$$h = 200 \text{ мм}, \quad b = 110 \text{ мм}, \quad d = 5,2 \text{ мм}, \quad t = 8,6 \text{ мм}, \quad J_z = 2030 \text{ см}^4, \\ W_z = 203 \text{ см}^3, \quad S_z = 114 \text{ см}^3.$$

Изобразим поперечное сечение нормальных напряжений в поперечном сечении двутавра на разных уровнях.

На уровне I-I

$$\sigma_{1-1} = \frac{M_z}{J_z} y_{1-1}; \quad y_{1-1} = \frac{h}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ мм} = 10 \text{ см}.$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{4000}{2030} \cdot 10 = 19,704 \text{ кН/см}^2 = 197,04 \text{ МПа}.$$

На уровне 2-2 при $y_{2-2} = \frac{h}{2} - t = \frac{200}{2} - 8,6 = 91,4 \text{ мм} = 9,14 \text{ см}$

$$\sigma_{2-2} = \frac{M_z}{J_z} y_{2-2} = \frac{4000}{2030} \cdot 9,14 = 18,005 \text{ кН/см}^2 = 180,05 \text{ МПа}.$$

На уровне 3-3 при $y_{3-3} = y_{2-2}$ $\sigma_{3-3} = \sigma_{2-2} = 180,05 \text{ МПа}.$

На уровне 4-4 при $y_{4-4} = 0$ $\sigma_{4-4} = 0.$

На уровне 5-5 при $y_{5-5} = -9,14$ см $\sigma_{5-5} = -\sigma_{3-3} = -180,05$ МПа.

На уровне 6-6 при $y_{6-6} = -9,14$ см $\sigma_{6-6} = -\sigma_{2-2} = -180,05$ МПа.

На уровне 7-7 при $y_{7-7} = -10$ см $\sigma_{7-7} = -\sigma_{1-1} = -197,04$ МПа.

На основании выполненных расчетов построена эпюра σ для опасного сечения A_z (рис. 7.7).

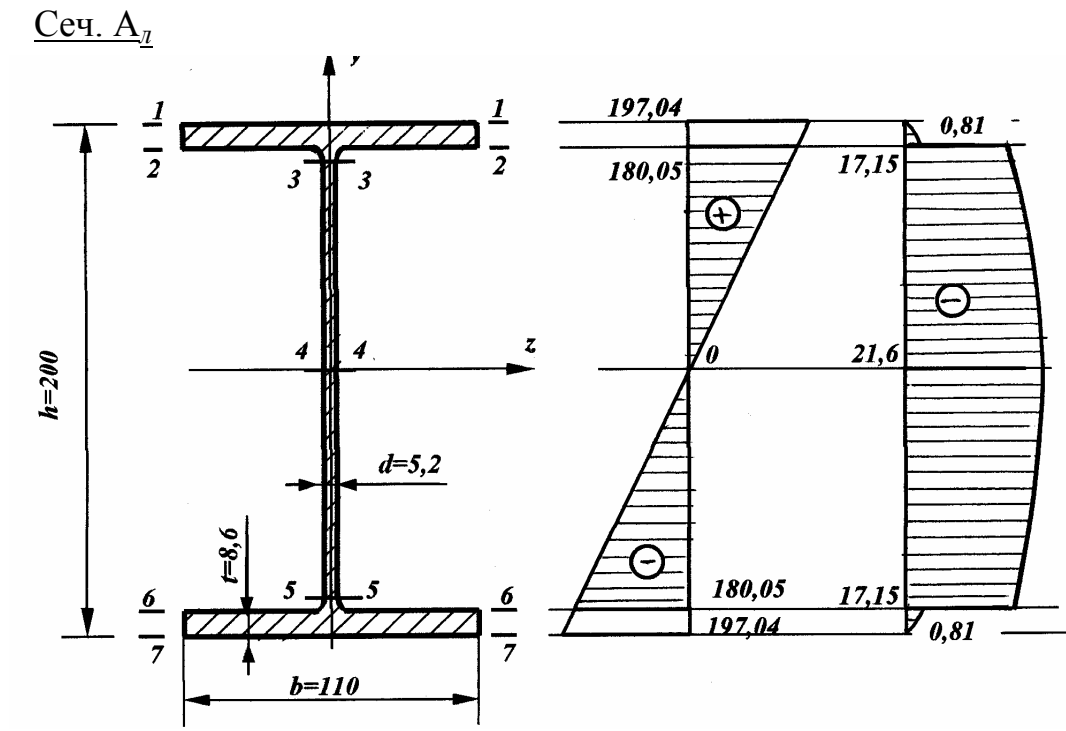


Рис. 7.7

Определим величину касательных напряжений в поперечном сечении двутавра на разных уровнях.

$$\tau_{1-1} = 0:$$

$$\tau_{2-2} = \frac{QS_z^{2-2}}{J_z b_{2-2}};$$

$$b_{2-2} = b = 11 \text{ см};$$

$$S_z^{2-2} = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 11 \cdot 0,86 \left(\frac{20}{2} - \frac{0,86}{2} \right) = 90,53 \text{ см}^2.$$

$$\tau_{2-2} = -\frac{20 \cdot 90,53}{2030 \cdot 11} = -0,081 \text{ кН/см}^2 = -0,81 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{3-3} = \frac{QS_z^{3-3}}{J_z b_{3-3}}; \quad b_{3-3} = d = 0,52 \text{ см}, \quad S_z^{3-3} = S_z^{2-2} = 90,53 \text{ см}^2.$$

$$\tau_{3-3} = -\frac{20 \cdot 90,53}{2030 \cdot 0,52} = -1,715 \text{ кН/см}^2 = -17,15 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{4-4} = \tau_{\max} = \frac{QS_z^{4-4}}{J_z b_{4-4}}; \quad b_{4-4} = d = 0,52 \text{ см, } S_z^{4-4} = 114 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{5-5} = \tau_{3-3} = -17,15 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{6-6} = \tau_{2-2} = -0,81 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{7-7} = 0.$$

На основании выполненных расчетов построена эпюра τ (рис. 7.7).

$$|\tau|_{\max} = 21,6 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа.}$$

Прочность по касательным напряжениям обеспечена с очень большим запасом.

Наиболее опасными точками могут быть точки на уровнях 3-3 или 5-5. Эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{180,05^2 + 4 \cdot 17,15^2} = 183,3 \text{ МПа} \leq R = 210 \text{ МПа.}$$

Прочность сечения обеспечена.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи:

Задача 1

Для балки, изображенной на рис. 7.8, а, построить эпюры Q и M , подобрать размеры поперечных сечений (рис. 7.8, б, в) построить эпюры σ и τ для опасных сечений. Нагрузки нормативные, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$.

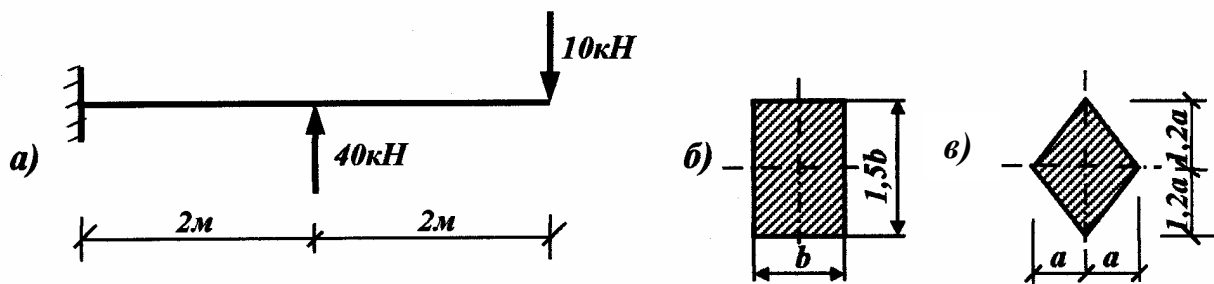


Рис. 7.8

Задача 2

Проверить на прочность стальную балку, изображенную на рис. 7.9, а. Форма и размеры поперечных сечений даны на рис. 7.9, б, в.

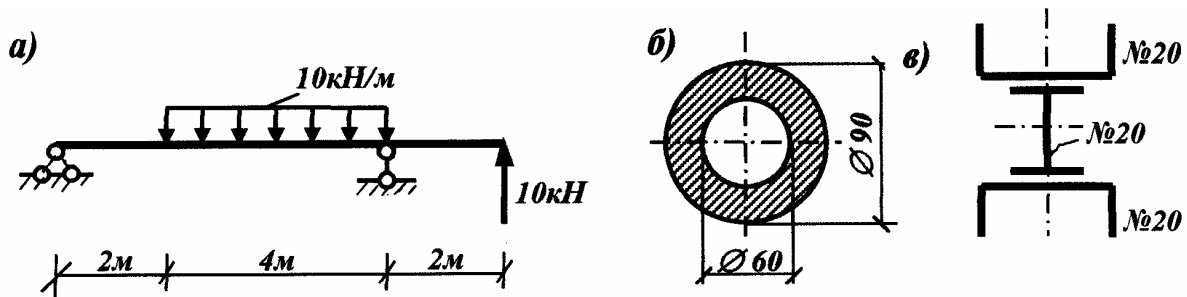


Рис. 7.9

ТЕМА № 8

Сложное сопротивление

Цель занятия: изучить методику расчета брусьев на кривой изгиб, внецентренное растяжение, изгиб с растяжением, изгиб с кручением

Кривой изгиб

Напряжение в любой точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

В поперечных сечениях с двумя осями симметрии и угловыми точками в поперечном сечении всегда найдется точка, где будут действовать максимальные нормальные напряжения, и условие прочности при расчете по допускаемым напряжениям имеет вид

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

При расчете по предельным состояниям вместо допускаемого напряжения принимаем расчетное сопротивление R , только M_z и M_y вызываюся действием расчетных нагрузок.

Для произвольных поперечных сечений необходимо определить положение нейтральной оси. Опасными будут точки, находящиеся на наибольшем удалении от нейтральной оси.

Положение нейтральной оси определяется углом наклона β нейтральной оси к главной центральной оси z .

$$|\operatorname{tg}\beta| = |\operatorname{tg}\alpha| \cdot \frac{J_z}{J_y},$$

где α – угол наклона между вертикальной главной центральной осью и следом плоскости действия суммарного изгибающего момента.

След плоскости действия суммарного изгибающего момента проходит через квадранты, где находятся точки с максимальными нормальными напряжениями, а нейтральная ось никогда не проходит через эти квадранты.

Рассмотрим пример расчета стержней на кривой изгиб.

Пример 1

Определить размеры поперечных сечений стальной балки, найти положение нейтральной оси и построить эпюру нормальных напряжений в опасном прямоугольном сечении для балки, изображенной на рис. 8.1. Принять $R = 210 \text{ МПа}$, а нагрузки расчетными.

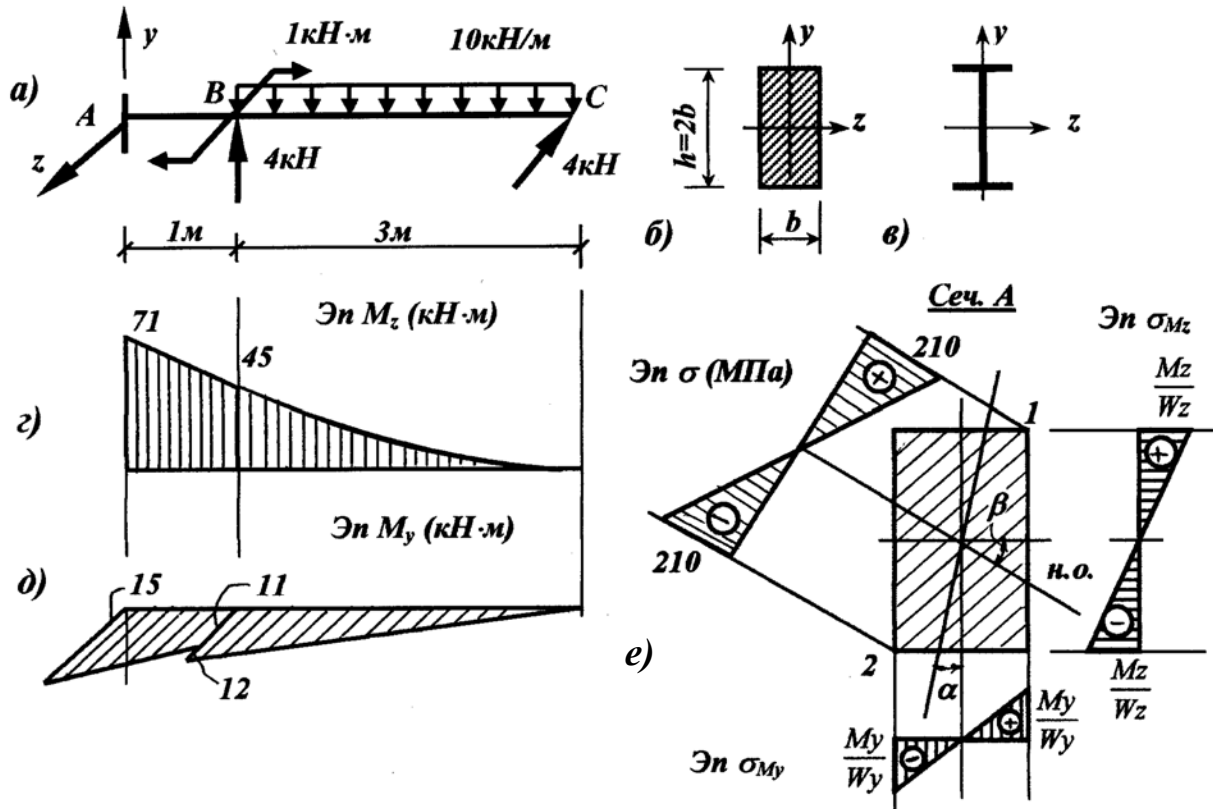
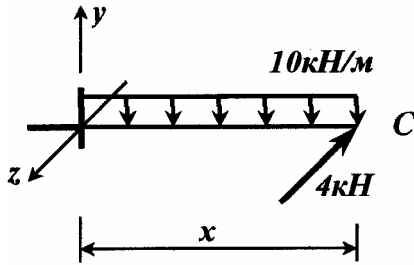


Рис. 8.1

Запишем выражения для M_z и M_y по участкам балки и вычислим их значения для характерных сечений

Участок CB $0 \leq x \leq 3$ м



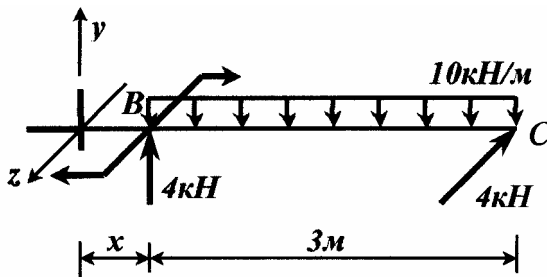
$$M_z = -10 \frac{x^2}{2} = -5x^2.$$

$$x = 0, M_z = 0; \quad x = 3 \text{ м}, M_z = -45 \text{ кНм}$$

$$M_y = -4x.$$

$$x = 0, M_y = 0; \quad x = 3 \text{ м}, M_y = -12 \text{ кНм}$$

Участок BA $0 \leq x \leq 1$ м



$$M_z = -10 \cdot 3(1,5 + x) + 4x = -45 - 26x.$$

$$x = 0, M_z = -45 \text{ кНм};$$

$$x = 1 \text{ м}, M_z = -71 \text{ кНм}.$$

$$M_y = -4(3 + x) + 1 = -11 - 4x;$$

$$x = 0, M_y = -11 \text{ кНм};$$

$$x = 1 \text{ м}, M_y = -15 \text{ кНм}.$$

1. На основании выполненных расчетов строим эпюры M_z и M_y (рис. 8.1, z, d).

2. Анализируем эпюры M_z и M_y и устанавливаем, что наиболее опасным сечением является сечение A у жесткой заделки, где M_z и M_y имеют максимальные по абсолютной величине значения, а опасными точками (см. рис. 8.1, e) являются точки 1 и 2. В точке 1 будут наибольшие растягивающие, а в точке 2 – наибольшие сжимающие напряжения. На сечение смотрим по направлению оси x.

3. Определим положение нейтральной оси. След плоскости действия результирующего изгибающего момента определяется углом α и проходит через 1-й и 3-й квадранты.

$$|\operatorname{tg} \alpha| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right| = \frac{15}{71} = 0,2113; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,2113 \approx 12^\circ.$$

Положение нейтральной оси определяется

$$|\operatorname{tg} \beta| = |\operatorname{tg} \alpha| \frac{J_z}{J_y}.$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3}b^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{1}{6}b^4$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0,2113 \cdot \frac{2b^4 \cdot 6}{3 \cdot b^4} = 0,2113 \cdot 4 = 0,8452$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 0,8452 \approx 39^\circ$$

5. Определим из условия прочности по предельным состояниям величину размеров прямоугольного поперечного сечения.

Наиболее опасные точки 1 и 2, но для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, они равноопасны. Остановимся на точке 1.

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Для прямоугольного поперечного сечения моменты сопротивления будут равны:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{1}{3}b^3.$$

$$\frac{3M_z}{2b^3} + \frac{3M_y}{b^3} \leq R; \quad \frac{1,5M_z}{b^3} + \frac{3M_y}{b^3} \leq R.$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1,5M_z + 3M_y}{R}};$$

$$M_z = 71 \text{ кНм} = 7100 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

$$M_y = 15 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1500 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

$$R = 210 \text{ МПа} = 21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot 7100 + 3 \cdot 1500}{21}} = 8,98 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

$$h = 2b = 18 \text{ см}.$$

Определим требуемый номер двутавровой балки.

Предварительно необходимо задаться соотношением $\frac{W_y}{W_z}$.

Для средних номеров двутавра $\frac{W_y}{W_z} \approx 10$.

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R; \quad \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{0,1W_z} \leq R;$$

$$W_z \geq \frac{M_z + 10M_y}{R} = \frac{7100 + 10 \cdot 1500}{21} = 1052,4 \text{ см}^3.$$

Обращаемся к сортаменту прокатной стали и выбираем номер двутавра с близким к требуемому моменту сопротивления. Наиболее близко подходит двутавр № 45 с $W_z = 1231 \text{ см}^3$ и $W_y = 101 \text{ см}^3$.

Проверим подобранный двутавр

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{7100}{1231} + \frac{1500}{101} = 5,768 + 14,851 = 20,619 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 206,19 \text{ МПа} \leq R = 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность обеспечена. Окончательно выбираем к установке двутавр № 45.

Внецентренное растяжение (сжатие)

Напряжение в любой точке поперечного сечения при внецентренном сжатии

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right),$$

где z_F, y_F – координаты приложения нагрузки в системе главных центральных осей поперечного сечения;

z, y – координаты рассматриваемой точки в системе главных центральных осей поперечного сечения;

A – площадь поперечного сечения;

i_z^2, i_y^2 – квадраты радиусов инерции сечения относительно главных центральных осей.

При растягивающей нагрузке значение F берется с плюсом, а при сжимающей – с минусом.

Для определения опасных точек находят положение нейтральной оси. Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях, равны:

$$z_N = -\frac{i_y^2}{z_F}; \quad y_N = -\frac{i_z^2}{y_F}.$$

Рассмотрим расчет на внецентренное сжатие на конкретном примере 2.

Пример 2

Короткая чугунная стойка, поперечное сечение которой изображено на рис. 8.2, *a*, подвергается сжатию силой, приложенной в точке *A*. Определить величину допускаемой нагрузки, если допускаемое напряжение чугуна на сжатие $[\sigma_c] = 140$ МПа, а на растяжение $[\sigma_p] = 40$ МПа.

1. Для произвольного сечения необходимо определить положение главных центральных осей и значения осевых моментов инерции относительно главных центральных осей.

а) определим положение центра тяжести относительно произвольных осей. Так как сжатие имеет одну ось симметрии, то одна координата центра тяжести и положение одной из главных центральных осей известны, т.е.

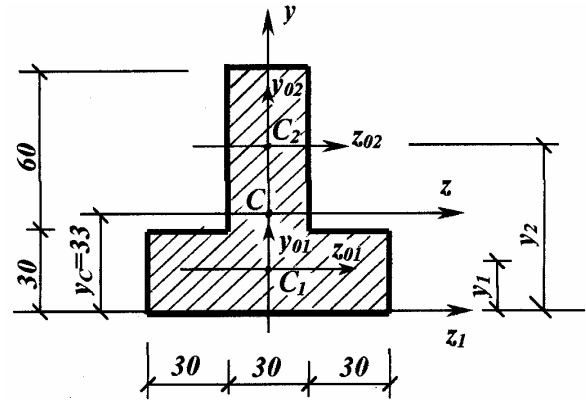


Рис. 8.2

ось симметрии (ось *y*) является главной центральной и координата $z_c = 0$.

Относительно второй произвольной оси z_1 координата центра тяжести будет равна

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2}.$$

Площадь нижнего прямоугольника

$$A_1 = 3 \cdot 9 = 27 \text{ см}^2;$$

площадь верхнего прямоугольника

$$A_2 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

$$y_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ см}; \quad y_2 = 3,0 + \frac{6}{2} = 6 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{27 \cdot 1,5 + 18 \cdot 6}{27 + 18} = 3,3 \text{ см}.$$

б) через найденное положение центра тяжести проводим вторую главную ось *z*.

в) определим координаты центров тяжести составляющих фигур относительно главных центральных осей z, y .

$$z_{1c} = 0; \quad y_{1c} = y_1 - y_c = 1,5 - 3,3 = -1,8 \text{ см},$$

$$z_{2c} = 0; \quad y_{2c} = y_2 - y_c = 6 - 3,3 = 2,7 \text{ см}.$$

г) определим значения главных центральных моментов инерции

$$\begin{aligned} J_z &= J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = J_{z_{01}}^{(1)} + y_{1c}^2 A_1 + J_{z_{02}}^{(2)} + y_{2c}^2 A_2 = \\ &= \frac{9 \cdot 3^3}{12} + (-1,8)^2 \cdot 27 + \frac{3 \cdot 6^3}{12} + 2,7^2 \cdot 18 = \\ &= 20,25 + 87,48 + 54 + 131,22 = 292,95 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = J_{y_{01}}^{(1)} + J_{y_{02}}^{(2)} = \\ &= \frac{3 \cdot 9^3}{12} + \frac{6 \cdot 3^3}{12} + 182,25 + 13,5 = 195,75 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

д) определим значения квадратов радиусов инерции относительно главных центральных осей:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{292,95}{27 + 18} = \frac{292,95}{45} = 6,51 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{195,75}{45} = 4,35 \text{ см}^2.$$

2. Определим положение нейтральной оси, для чего вычислим отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях

$$z_N = -\frac{i_y^2}{z_F};$$

координаты приложения нагрузки в системе главных центральных осей $z_F = -4,5 \text{ см}, \quad y_F = -3,3 \text{ см}.$

$$z_N = -\frac{4,3}{-4,5} = 0,967 \text{ см};$$

$$y_N = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{6,51}{-3,3} = 1,973 \text{ см}.$$

3. Наиболее опасными точками в сечении являются точки A и B , наиболее удаленные от центральной оси (рис. 8.3)

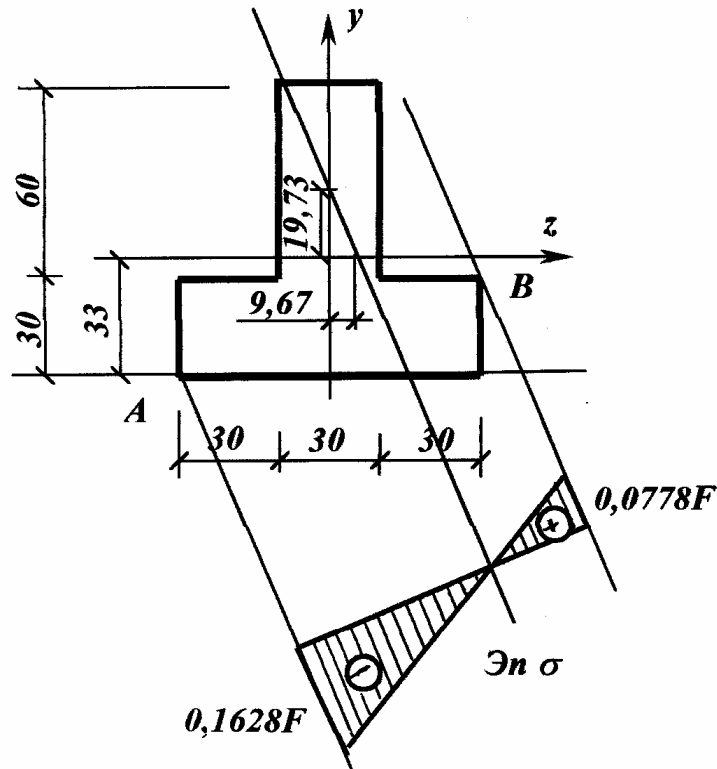


Рис. 8.3

Координаты точки A в системе главных центральных осей $z = -4,5$ см, $y = -3,3$ см.

Координаты точки B — $z = 4,5$ см, $y = -0,3$ см.

Определим величину напряжений в этих точках:

$$\begin{aligned} \max \sigma_c = \sigma_A &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{F}{45} \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot (-4,5)}{4,35} + \frac{(-3,3) \cdot (-3,3)}{6,51} \right) = \\ &= -\frac{F}{45} (1 + 4,655 + 1,673) = -0,628F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sigma_p = \sigma_B &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{F}{45} \left(1 + \frac{(4,5) \cdot (4,5)}{4,35} + \frac{(-3,3) \cdot (-0,3)}{6,51} \right) = \\ &= -\frac{F}{45} (1 - 4,655 + 0,152) = 0,0778F. \end{aligned}$$

4. Определим величину допускаемой сжимающей нагрузки из условия прочности чугуна при растяжении.

$$\max \sigma_c \leq [\sigma_c]$$

$$0,1628F = [\sigma_c]; \quad F = \frac{[\sigma_c]}{0,1628};$$

$$[\sigma_c] = 130 \text{ МПа} = 13 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$F = \frac{13}{0,1628} = 79,85 \text{ кН}.$$

5. Определим величину допускаемой сжимающей нагрузки из условия прочности чугуна при растяжении.

$$\max \sigma_p \leq [\sigma_p]$$

$$0,0778F = [\sigma_p]; \quad [\sigma_p] = 40 \text{ МПа} = 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

$$F = \frac{4}{0,0778} = 51,41 \text{ кН}.$$

6. Окончательно принимаем величину допускаемой сжимающей нагрузки $F = 51,41 \text{ кН}$, определяемую условием прочности чугуна на растяжение.

Изгиб с растяжением

Напряжения в любой точке поперечного сечения при изгибе с растяжением определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z.$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях, равны

$$z_N = \left| \frac{N}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y} \right|; \quad y_N = \left| \frac{N}{A} \cdot \frac{J_z}{M_z} \right|.$$

Опасными точками являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Рассмотрим расчет бруса на изгиб с растяжением на конкретном примере.

Пример 3

Для стальной балки, изображенной на рис. 8.4, а, подобрать необходимые размеры поперечного сечения (рис. 8.4, б). Нагрузки считать расчетными. Расчетное сопротивление $R = 210$ МПа.

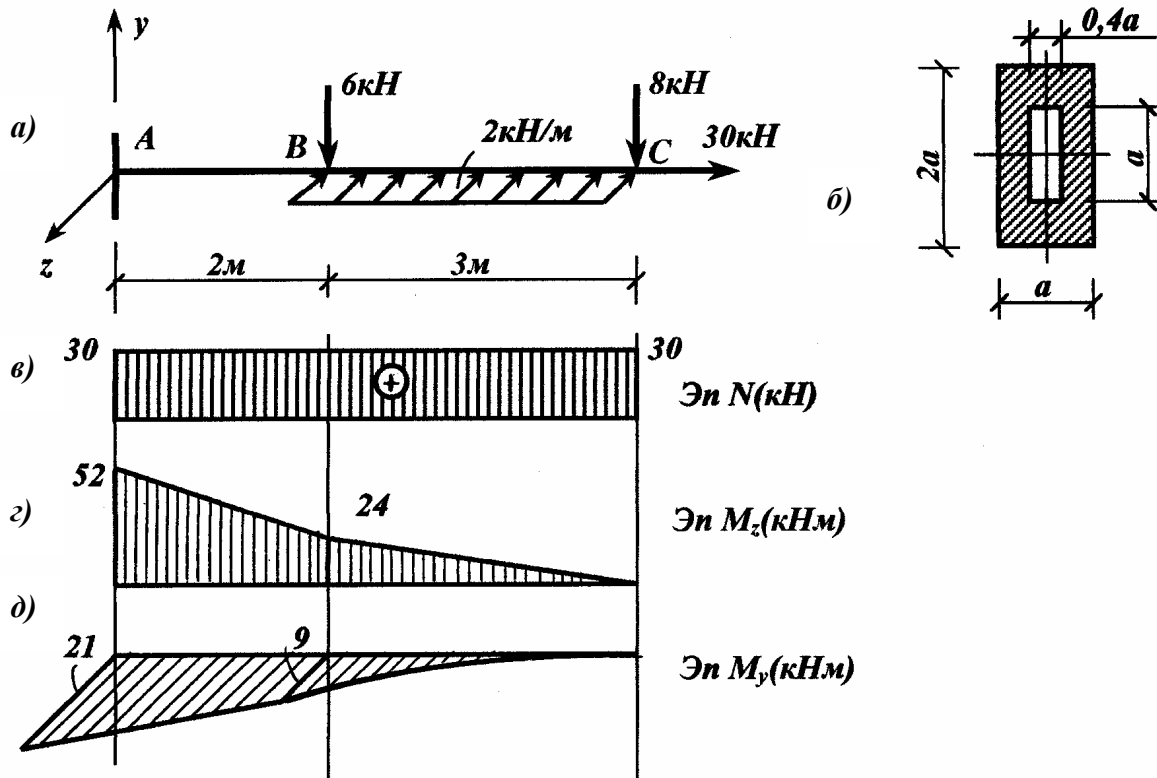


Рис. 8.4

1. Запишем выражение для внутренних усилий N , M_z , M_y по участкам балки и определим их значения для характерных сечений

Участок CB $0 \leq x \leq 3$ м

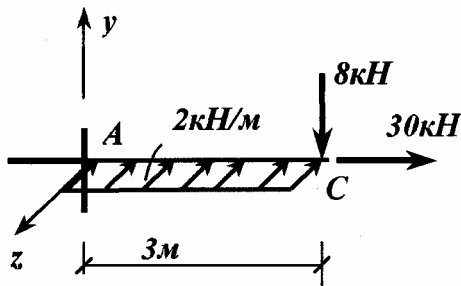
$$N = 30 \text{ кН};$$

$$M_z = -8 \cdot x; \quad M_z = 0;$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad M_z = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_y = -2 \frac{x^2}{2} = -x^2;$$

$$x = 0, \quad M_y = 0; \quad x = 3, \quad M_y = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Участок ВА $0 \leq x \leq 3 \text{ м}$

$$N = 30 \text{ кН.}$$

$$M_z = -8(3 + x) - 6x = -24 - 14x$$

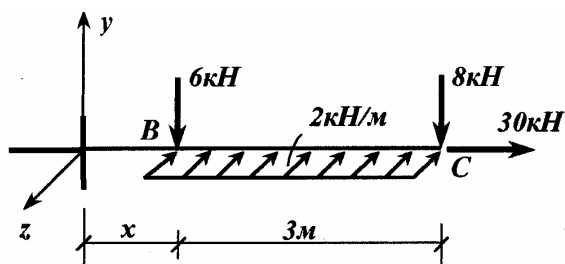
$$x = 0, M_z = -24 \text{ кНм;}$$

$$x = 2 \text{ м, } M_z = -52 \text{ кНм}$$

$$M_y = -3 \cdot 2(1,5 + x) = -9 - 6x;$$

$$x = 0, M_y = -9 \text{ кНм;}$$

$$x = 2 \text{ м, } M_y = -21 \text{ кНм}$$



2. Строим эпюры N , M_z и M_y (рис. 8.4, в, з, д).

3. Анализируем эпюры N , M_z , M_y и определяем опасное сечение. Таким сечением является сечение A у жесткой заделки, где продольная сила и изгибающие моменты имеют максимальные по абсолютной величине значения.

4. В сечении с двумя осями симметрии, которые являются главными центральными осями, и угловыми точками можно определить наиболее опасную угловую точку и без нахождения положения нейтральной оси. Как видно из рис. 8.4, е, опасной точкой является точка 1, и условие прочности по предельным состояниям примет вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

5. Определим необходимые геометрические характеристики поперечного сечения

$$A = a \cdot 2a - 0,4a \cdot a = 1,6a^2$$

$$J_z = \frac{a(2a)^3}{12} - \frac{0,4a \cdot a^3}{12} = 0,6667a^4 - 0,3333a^4 = 0,3333a^4.$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{0,3333a^4}{a} = 0,3333a^3.$$

$$J_y = \frac{2a \cdot a^3}{12} - \frac{a(0,4a)^3}{12} = 0,1667a^4 - 0,0053a^4 = 0,1613a^4.$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{0,1613a^4}{0,5a} = 0,3227a^3.$$

6. Подставив значения A , W_z , W_y в условие прочности, получим

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{30}{1,6a^2} + \frac{5200}{0,6333a^3} + \frac{2100}{0,3227a^3} = 21.$$

Решая относительно a , получим $a \approx 9$ см.

Проверим правильность нахождения a .

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{30}{1,6 \cdot 9^2} + \frac{5200}{0,6333 \cdot 9^3} + \frac{2100}{0,3227 \cdot 9^3} = 0,231 + 11,263 + 8,927 = \\ &= 20,421 \text{ кН/см}^2 = 204,21 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Окончательно принимаем размер $a = 9$ см.

Изгиб с кручением

Расчеты на изгиб с кручением выполняются с использованием теорий прочности.

Для брусьев с круглым поперечным сечением можно определить эквивалентный момент по одной из теорий прочности.

По третьей теории прочности

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T_k^2}.$$

Условие прочности брусьев с круглым поперечным сечением определяют опасные точки, для которых находят эквивалентные напряжения по одной из теорий прочности и сравнивают их либо с допускаемыми напряжениями, либо с расчетными сопротивлениями.

Рассмотрим расчет на изгиб с кручением на примере.

Пример 4

Для стальной балки, изображенной на рис. 8.5, a , подобрать размеры круглого и прямоугольного поперечных сечений (рис. 8.5, b , v). Принять нагрузки нормативными и допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

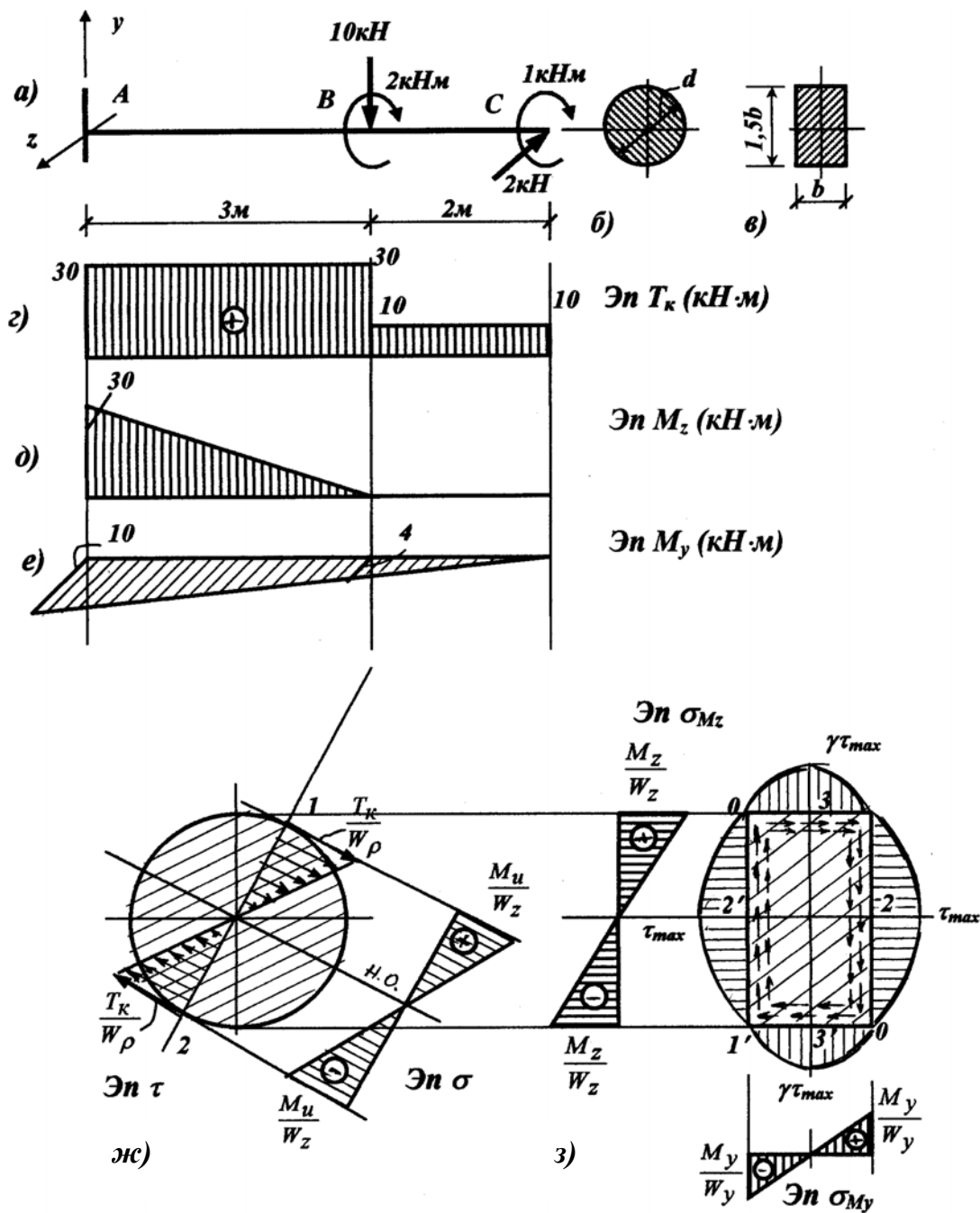
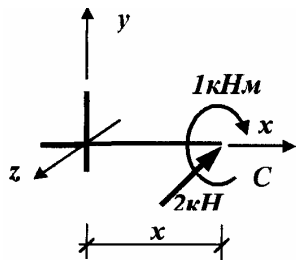


Рис. 8.5

1. Запишем выражения для внутренних усилий по участкам бруса

Участок СВ $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$

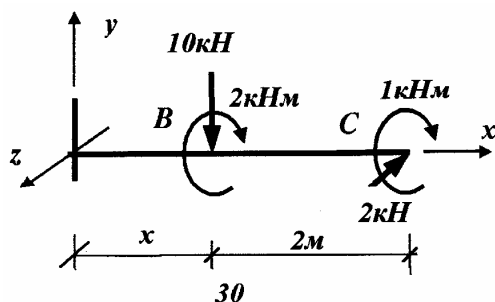


$$T_k = 10 \text{ кНм}, M_z = 0, M_y = -2x.$$

$$x = 0, M_y = 0; x = 2 \text{ м}, M_y = -4 \text{ кНм}.$$

Участок ВА

$$0 \leq x \leq 3 \text{ м}$$



$$T_k = 10 + 20 = 30 \text{ кНм.}$$

$$M_z = -10x;$$

$$x = 0, M_z = 0; \quad x = 3 \text{ м, } M_z = 30 \text{ кНм.}$$

$$M_y = -2(2 + x) = -4 - 2x;$$

$$x = 0, M_y = -4 \text{ кНм;}$$

$$x = 3 \text{ м, } M_y = -4 \text{ кНм.}$$

2. Строим эпюры T_k , M_z и M_y , используя выполненные расчеты (рис. 8.5, г, д, е).

3. Анализируем эпюры T_k , M_z и M_y и определяем опасные сечения.

В данном примере опасным сечением является сечение А у жесткой заделки.

4. Определим требуемый диаметр поперечного сечения бруса.

Опасными точками будут точки 1 и 2 (рис. 8.5, ж), определяемые следом плоскости суммарного изгибающего момента.

$$|\operatorname{tg}\beta| = |\operatorname{tg}\alpha| = \frac{|M_y|}{|M_z|} = \frac{10}{30} = 0,3333$$

$$\alpha = \beta \approx 18,5^\circ$$

Они равноопасны. Остановимся на точке 1.

Суммарный изгибающий момент

$$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 31,623 \text{ кНм.}$$

Эквивалентный момент по третьей теории прочности

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_u^2 + T_k^2} = \sqrt{31,623^2 + 30^2} = 43,59 \text{ кНм} = 4359 \text{ кНсм.}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{W_z} \leq [\sigma]; \quad W_z \approx 0,1d^3; \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4359}{0,1 \cdot 16}} \approx 14 \text{ см} \quad d = 14 \text{ см}$$

5. Определим требуемый размер b прямоугольного поперечного сечения.

Наиболее опасными точками в опасном сечении могут быть точки 1, 2, 3 или 1', 2', 3', которые равноопасны.

Точка 1.

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y};$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,5b)^2}{6} = 0,375b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{1,5b \cdot b^2}{6} = 0,25b^3.$$

$$\sigma_1 = \frac{3000}{0,375b^3} + \frac{1000}{0,25b^3} = \frac{12000}{b^3};$$

$$\tau_1 = 0. \quad \sigma_{1экв}^{III} = \sigma_1 = \frac{12000}{b^3}.$$

Точка 2

$$\sigma_2 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{1000}{0,25b^3} = \frac{4000}{b^3}.$$

$$\tau_2 = \frac{T_k}{W_k}; \quad W_k = \beta b^3.$$

При $\frac{h}{b} = 1,5$, $\beta = 0,346$, $\gamma = 0,859$.

$$W_k = 0,346b^3 \quad \tau_2 = \frac{3000}{0,346b^3}$$

$$\sigma_{2экв}^{III} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2}$$

$$\sigma_{2экв}^{III} = \frac{1}{b^3} \sqrt{4000^2 + 4 \cdot 8670,5^2} = \frac{17796}{b^3}.$$

Точка 3.

$$\sigma_3 = \frac{M_z}{W_z} = \frac{3000}{0,375b^3} = \frac{8000}{b^3};$$

$$\tau_3 = \gamma \tau_{\max} = \gamma \tau_2 = 0,859 \cdot \frac{8670,5}{b^3} = \frac{7448}{b^3}.$$

$$\sigma_{3экв}^{III} = \sqrt{\sigma_3^2 + 4\tau_3^2} = \frac{1}{b^3} \sqrt{8000^2 + 4 \cdot 7448^2} = \frac{16908}{b^3}.$$

Наиболее опасной оказалась точка 2 с $\sigma_{2экв}^{III} = \frac{17796}{b^3}$.

Условие прочности $\sigma_{max}^{экв} \leq [\sigma]$; $\frac{17796}{b^3} \leq 16$.

$$b = \sqrt[3]{\frac{17796}{16}} = \sqrt[3]{1112,25} \approx 10,5 \text{ см}$$

$$h = 1,5b = 1,5 \cdot 10,5 = 15,75 \text{ см.}$$

Задания для самостоятельной работы

Самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 1.

Шарнирно опертая по концам балка длиной 4 м несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q = 5 \text{ кН/м}$. Поперечное сечение балки – швеллер № 18. Стенка швеллера наклонена к плоскости действия нагрузки под углом $\varphi = 5^\circ$ (рис. 8.6). Определить нормальные напряжения в точках A , B , C и D опасного сечения балки и построить эпюру нормальных напряжений.

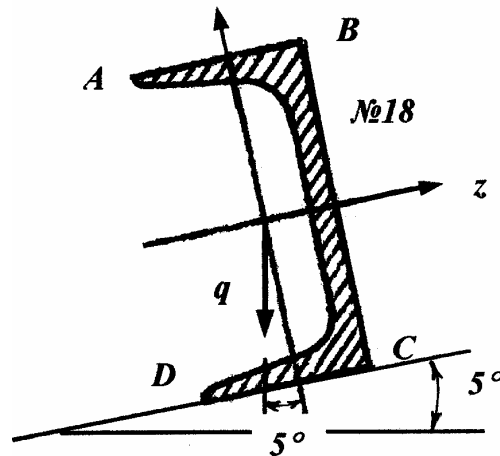


Рис. 8.6

Задача 2

Короткая стойка, поперечное сечение которой изображено на рис. 8.7, растягивается силой $F = 40 \text{ кН}$, приложенной в точке 1. Определить максимальную величину сжимающих и растягивающих напряжений.

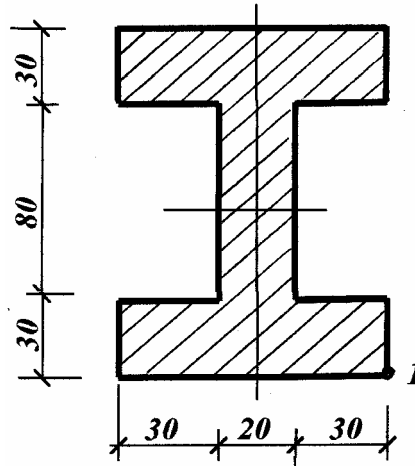


Рис. 8.7

Задача 3

В опасном поперечном сечении вала действуют изгибающие моменты $M_z = 25$ кНм, $M_y = 16$ кНм и крутящий момент $T_k = 15$ кНм. Проверить на прочность:

- а) вал с круглым поперечным сечением диаметром $d = 120$ мм;
 - б) прямоугольное поперечное сечение с размерами $b \times h = 120 \times 180$ мм.
- Нагрузки нормативные, $[\sigma] = 100$ МПа.

ТЕМА № 9

Продольный изгиб

Цель занятия: изучить методику определения допускаемой сжимающей нагрузки при известных размерах поперечного сечения стержня, а также научиться определять размеры поперечного сечения, при которых обеспечивается устойчивость стержней при заданной нагрузке.

Рассмотрим методику расчета на устойчивость на конкретных примерах.

Пример 1

Определить величину сжимающей нагрузки для стойки с шарнирным закреплением концов (рис. 9.1, а) и формой поперечного сечения, изображенного на рис. 9.1, б. Материал стойки сталь Ст.3 с $[\sigma] = 160$ МПа.

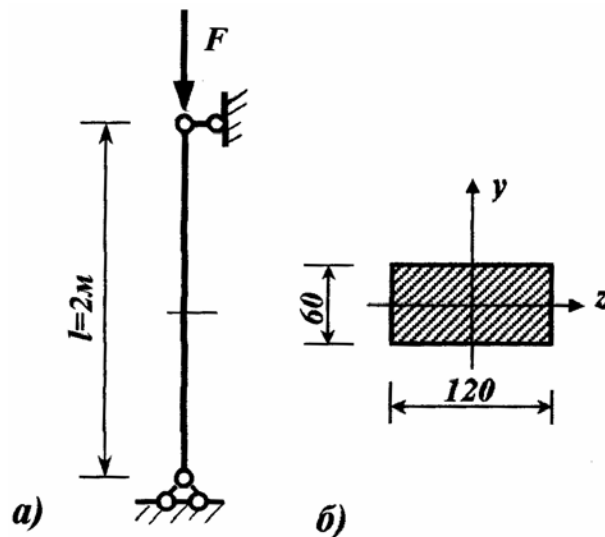


Рис. 9.1

Решение данной задачи рекомендуется производить в такой последовательности:

1. Определим площадь поперечного сечения стойки.

$$A = 6 \times 12 = 72 \text{ см}^2.$$

2. Определим величину минимального момента инерции. В нашем примере

$$J_{\min} = J_z = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4.$$

3. Определим минимальный радиус инерции поперечного сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{216}{72}} = 1,732 \text{ см.}$$

4. Определим гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{1,732} = 115,5.$$

5. Определим величину критической нагрузки. Так как гибкость стойки $\lambda = 115,5 > \lambda_{np} = 100$ для стали Ст.3, то потеря устойчивости происходит в упругой стадии и величину критической силы можно определить по формуле Эйлера.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 216}{(1 \cdot 200)^2} = 1064,8 \text{ кН.}$$

6. Величину допускаемой нагрузки можно получить, разделив величину критической нагрузки на нормативный коэффициент запаса устойчивости $[n]$. Его величина колеблется в больших пределах $[n] = (1,5 - 3,5)$. Примем $[n] = 2$. Тогда

$$F = \frac{F_{кр}}{[n]} = \frac{1064,8}{2} = 532,4 \text{ кН.}$$

Величину допускаемой нагрузки можно определить с использованием коэффициента снижения основного допускаемого напряжения φ , величина которого определяется гибкостью стойки. При $\lambda = 115$.

$$\varphi = \frac{0,52 + 0,45}{2} \approx 0,475;$$

$$F = \varphi A[\sigma] = 0,475 \cdot 72 \cdot 16 = 547,2 \text{ кН.}$$

Величины допускаемых нагрузок получились практически одинаковыми.

Пример 2

Стойка, изображенная на рис. 9.2, а, сжимается центрально приложенной расчетной силой $F = 400 \text{ кН}$. Определить размеры поперечного сечения (рис. 9.2, б), если расчетное сопротивление $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$.

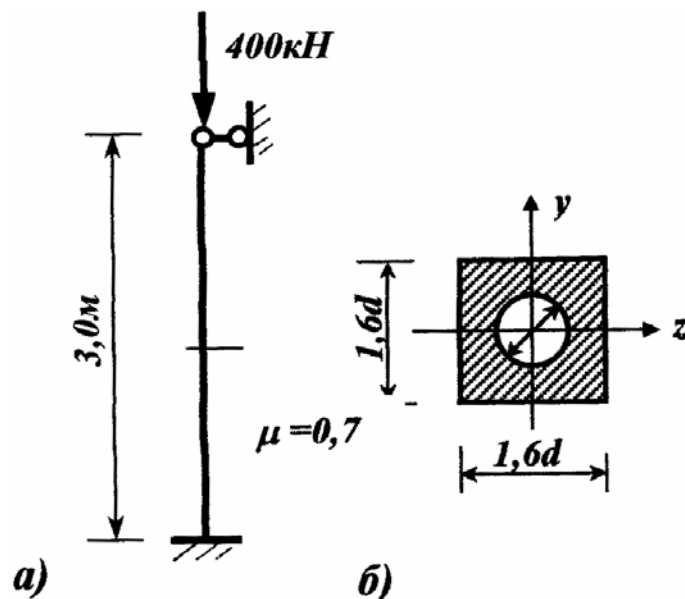


Рис. 9.2

Решение данной задачи рекомендуется выполнять в изложенной ниже последовательности.

1. Определим площадь поперечного сечения, выразив ее через размер d , а затем выразим размер d через площадь поперечного сечения A .

$$A = 1,6d \cdot 1,6d - \frac{\pi d^2}{4} = 1,775d^2,$$

$$d = \sqrt{\frac{A}{1,775}}.$$

2. Определим минимальный момент инерции поперечного сечения. В данном примере $J_z = J_y = J_{\min}$.

$$J_{\min} = \frac{1,6d \cdot (1,6d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 0,5461d^4 - 0,0491d^4 = 0,497d^4.$$

3. Определим минимальный радиус инерции поперечного сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,497d^4}{1,775d^2}} = 0,529d.$$

4. Определим гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{0,520d} = \frac{397}{d}.$$

5. Определим размеры поперечного сечения при помощи коэффициента продольного изгиба φ .

а) задаемся $\varphi_1 = 0,5$

Требуемая площадь поперечного сечения

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{400}{0,5 \cdot 21} = 38,1 \text{ см}^2 \text{ при размере } d_1 = \sqrt{\frac{A_1}{1,775}} = \sqrt{\frac{38,1}{1,775}} = 4,63 \text{ см}.$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_1 = \frac{397}{d_1} = \frac{397}{4,63} = 85,75.$$

Такому значению гибкости соответствует табличное значение φ_1^T , определяемое методом интерполяции с использованием таблицы.

При $\lambda = 80$, $\varphi = 0,75$; при $\lambda = 90$, $\varphi = 0,69$;

$$\text{при } \lambda = 85,75, \quad \varphi_1^T = 0,75 + \frac{0,69 - 0,75}{10} \cdot 5,75 = 0,716.$$

$\varphi_1^T \gg \varphi_1$. Расчет продолжим.

$$\text{б) задаемся } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^T}{2} = \frac{0,5 + 0,716}{2} \approx 0,61$$

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{400}{0,61 \cdot 21} = 31,22 \text{ см}^2 \text{ при } d_2 = \sqrt{\frac{A_2}{1,775}} = \sqrt{\frac{31,22}{1,775}} = 4,19 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_2 = \frac{397}{d_2} = \frac{397}{4,19} = 94,75.$$

Такому значению гибкости соответствует значение

$$\varphi_2^T = 0,69 + \frac{0,60 - 0,69}{10} \cdot 4,75 = 0,647$$

$$\varphi_2^T = 0,647 > \varphi_2 = 0,61.$$

Расчет продолжим

$$\text{в) задаемся } \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^T}{2} = \frac{0,61 + 0,647}{2} = 0,63$$

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 R} = \frac{400}{0,63 \cdot 21} = 30,23 \text{ см}^2 \text{ при } d_3 = \sqrt{\frac{30,23}{1,775}} = 4,13 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_3 = \frac{397}{4,13} = 96,13.$$

Такому значению гибкости соответствует значение

$$\varphi_3^T = 0,69 + \frac{0,60 - 0,69}{10} \cdot 6,13 = 0,635.$$

$$\varphi_3^T \approx \varphi_3.$$

Проверим стойку. Приведенные напряжения

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3^T \cdot A_3} = \frac{400}{0,635 \cdot 30,23} = 20,84 \text{ кН/см}^2 = 208,4 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Расчет на этом можно прекратить.

Окончательно имеем $d = 4,13 \text{ см}$, $A = 30,23 \text{ см}^2$, $\lambda = 96,13$.

6. Определим величину критической силы $F_{кр}$. Так как $\lambda = 96,13 < \lambda_{пр} = 100$ (для стали Ст.3), то определять величину критической силы будем по формуле Ясинского

$$F_{кр} = A(a - b\lambda).$$

Для стали Ст.3 $a = 31 \text{ кН/см}^2$, $b = 0,114 \text{ кН/см}^2$

$$F_{кр} = 30,23(31 - 0,114 \cdot 96,13) = 606,3 \text{ кН.}$$

7. Действительный коэффициент запаса на устойчивость

$$n = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{606,3}{400} = 1,52.$$

Пример 3

Стойка с двутавровым поперечным сечением и шарнирным закреплением по концам (рис. 9.3, а) длиной $l = 2,4$ м сжимается осевой силой с нормативной величиной $F = 300$ кН. Подобрать необходимый номер двутавра, если $[\sigma] = 160$ МПа = 16 кН/см².

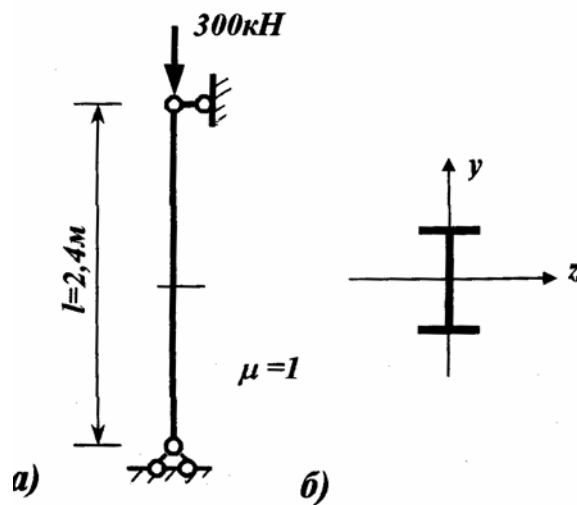


Рис. 9.3

Минимальный момент инерции $J_{\min} = J_y$.

Для определения необходимого номера двутаврового поперечного сечения поступаем практически так же, как и для определения размеров произвольных сплошных сечений.

а) задаемся $\varphi_1 = 0,5$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{300}{0,5 \cdot 16} = 37,5 \text{ см}^2.$$

Обращаемся к сортаменту прокатной стали и выбираем номер двутавра с поперечным сечением, близким к требуемому. Наиболее близко подходит двутавр № 24 с $A = 34,8$ см², $J_y = 198$ см⁴ и $i_y = 2,37$ см; $i_{\min} = i_y = 2,37$ см.

Определим гибкость стойки

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 240}{2,37} = 101,26.$$

Данной гибкости соответствует табличное значение коэффициента устойчивости

$$\varphi_1^T = 0,60 + \frac{0,52 - 0,60}{10} \cdot 1,26 = 0,59.$$

$$\varphi_1^T > \varphi_1.$$

При выборе этого номера двутавра будет некоторое недонапряжение.

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1^T \cdot A} = \frac{300}{0,59 \cdot 34,8} = 14,61 \text{ кН/см}^2 = 146,1 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Дальше можно поступать так:

а) проверим следующий, меньший номер двутавра;

б) зададимся новым значением $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2^T}{2} = \frac{0,5 + 0,59}{2} = 0,55.$

Необходимая площадь поперечного сечения

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{300}{0,55 \cdot 16} = 34,1 \text{ см}^2.$$

Обратимся к сортаменту прокатной стали и выберем двутавр № 22а с $A = 32,4 \text{ см}^2$, $J_y = 203$ и $i_y = 2,5 \text{ см}.$

Гибкость стойки $\lambda_2 = \frac{1 \cdot 240}{2,5} = 96.$

$$\varphi_2^T = 0,69 + \frac{0,60 - 0,69}{10} \cdot 6 = 0,636$$

Проверим этот двутавр

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2^T \cdot A_2} = \frac{300}{0,636 \cdot 32,4} = 14,56 \text{ кН/см}^2 = 145,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Проверим двутавр № 22 с $A = 30,2 \text{ см}^2$, $J_y = 155 \text{ см}^4$, $i_y = i_{\min} = 2,26 \text{ см}.$

Гибкость $\lambda_3 = \frac{1 \cdot 240}{2,26} = 106,2.$ Такой гибкости соответствует

$$\varphi_3^T = 0,60 + \frac{0,52 - 0,60}{10} \cdot 6,2 = 0,55.$$

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3^T \cdot A_3} = \frac{300}{0,55 \cdot 30,2} = 18,06 \text{ кН/см}^2 = 180,6 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$\% \text{ перенапр.} = \frac{180,6 - 160}{160} = 12,9\% > 3\%$$

Этот двутавр не подходит.

Окончательно принимаем двутавр № 22а с меньшей площадью поперечного сечения, а следовательно, с наименьшим расходом материала.

Гибкость стойки с двутавровым сечением № 22а

$$\lambda = 96 < \lambda_{\text{пред}} = 100;$$

$$F_{\text{кр}} = A(a - b\lambda) = 32,4(31 - 0,114 \cdot 96) = 649,8 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{649,9}{300} = 2,16.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие задачи:

Задача 1

В направлении какой оси, расположенной в плоскости поперечного сечения, будет выпучиваться при потере устойчивости каждый из стержней, сечения которых показаны на рис. 9.4, если каждый конец стержня одинаково закреплен во всех направлениях.

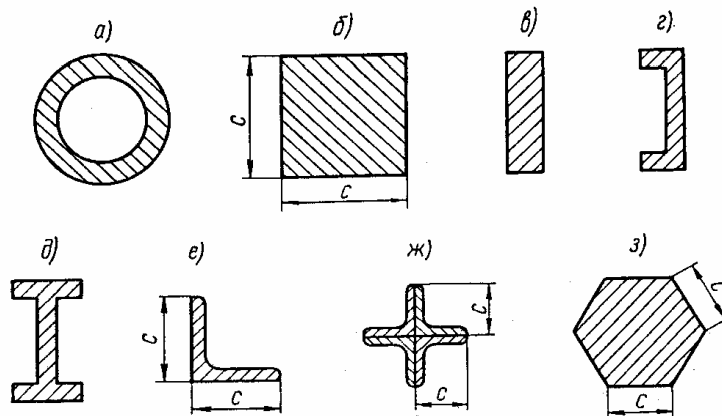


Рис. 9.4

Задача 2

Определить критическую силу для деревянной стойки прямоугольного сечения размером 10×20 см и длиной 8 м в следующих случаях:

- а) оба конца стойки шарнирно закреплены;
- б) оба конца стойки защемлены;
- в) один конец стойки защемлен, а другой свободен.

Модуль упругости $E = 10^4$ МПа.

Ответ: а) $F_{кр} = 26$ кН; б) $F_{кр} = 104$ кН; в) $F_{кр} = 6,5$ кН

Задача 3

Определить критическую силу для стального равнобедренного уголка с размерами сечения $100 \times 100 \times 10$ мм и длиной 1,2 м при защемленном одном конце и свободном другом. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $F_{кр} = 254$ МПа.

Задача 4

Определить размеры поперечного сечения деревянной стойки длиной 7,5 м, защемленной обоими концами и сжатой силой $P = 262$ кН. Поперечное сечение стойки квадратное. Основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 10$ МПа.

Ответ: 20×20 см.